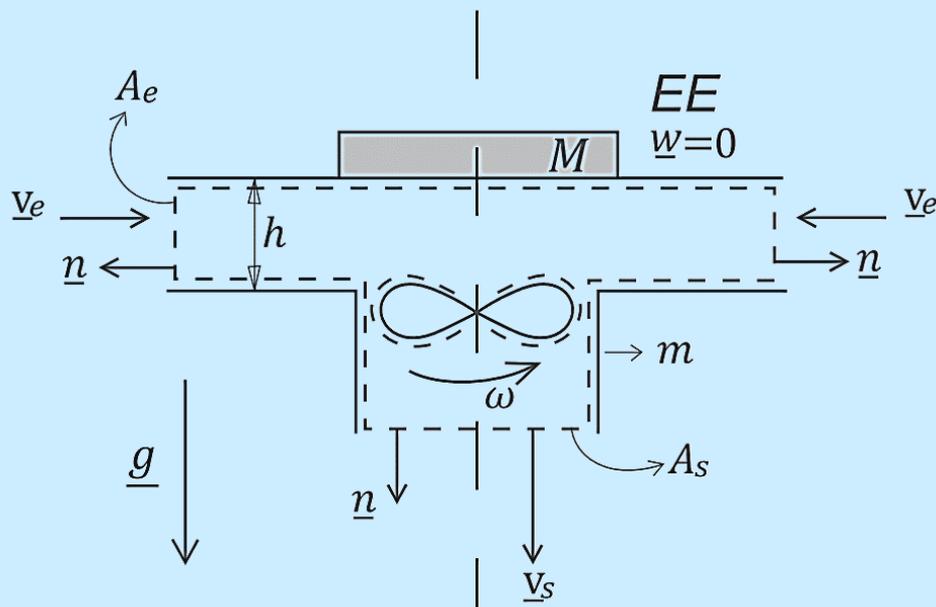


Mecánica de los Fluidos

Aspectos teóricos introductorios para Ingeniería



José Di Paolo

Este libro presenta una teoría introductoria de Mecánica de los Fluidos para un curso de ingeniería, utilizando funciones de campo y representación tensorial de magnitudes. En el Capítulo 1 se establece la hipótesis de los medios continuos y se definen los parámetros característicos de los fluidos; en el Capítulo 2 se aborda la notación y el álgebra indicial para la manipulación de las expresiones matemáticas; en el Capítulo 3 se trata la cinemática de los flujos y el concepto de derivada material; en el Capítulo 4 se analiza el campo de tensiones en un punto de un medio continuo; en el Capítulo 5 se estudia la hidrostática; en el Capítulo 6 se presenta el teorema del transporte y los balances macroscópico y microscópico de masa; en el Capítulo 7 se desarrolla el balance macroscópico de cantidad de movimiento y en el Capítulo 8 se lo obtiene en forma microscópica llegando a las ecuaciones de Navier-Stokes; en el Capítulo 9 se presenta el balance macroscópico de energía mecánica; en el Capítulo 10 se aborda el análisis dimensional y las condiciones de semejanza y similitud para, en el Capítulo 11, presentar el cálculo de la pérdida de carga; en el Capítulo 12 se discuten las razones físicas de la impulsión en bombas centrífugas y cuestiones básicas de importancia en el diseño y operación de instalaciones de conducción de fluidos.



El autor es Ingeniero Mecánico (UTN-1988), Magister en Tecnología Química (UNL-1992) y Doctor en Ciencias de la Ingeniería (UNC-1995). Es Profesor Titular de la FRSF-UTN y de la FI-UNER, para el grado y el posgrado. En su carácter de docente está a cargo de las cátedras Física Mecánica, Mecánica de los Fluidos, Estática y Resistencia de los Materiales, y Transporte Ferroviario. Es investigador de ambas instituciones en temas de Biomecánica Computacional, Mecánica de los Fluidos y Mecánica del Sólido, a la vez que es formador de recursos humanos en los niveles de grado y posgrado.



Mecánica de los Fluidos.

Aspectos teóricos introdutorios para Ingeniería.

José Di Paolo

Segunda Edición

-2024-

Di Paolo, José

Mecánica de los Fluidos: Aspectos teóricos introductorios para ingeniería /
José Di Paolo - 2a ed. revisada. - Santa Fe: José Di Paolo, 2024.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-631-00-5869-6

1. Mecánica de Fluidos. 2. Física. I. Título.
CDD 530

Fecha de catalogación: 18/10/2024

*A la memoria de Guillermina, mi madre,
para quien la vida no tuvo aulas, pero
quién las hizo posibles para mí.*

Prólogo a la segunda edición

Esta segunda edición mantiene el tenor y la secuencia temática de la primera edición, donde el texto ha sido revisado y clarificado, habiéndolo ilustrado o vinculado con imágenes y videos de propiedad del autor o de uso libre en internet; las ecuaciones y las figuras han sido revisadas y las últimas mejoradas. Al final de cada capítulo se han incorporado preguntas para el repaso y la autoevaluación y ha sido ampliada la bibliografía.

Este trabajo ha sido posible gracias al año sabático que me ha otorgado la Universidad Nacional de Entre Ríos durante el año calendario 2024 para desarrollar un plan de actividades académicas del cual esta segunda edición es parte.

Como la edición anterior, ésta -exclusivamente digital- no tiene fines de lucro y se cede libremente a colegas profesores, estudiantes y profesionales que deseen usar el libro con fines académicos, científicos y/o profesionales. Sirva esta obra como una humilde contribución al sistema universitario público argentino al cual pertenezco y con el cual me siento en deuda.

A través de mis correos quedo a disposición para lo que cualquier lector desee comunicarme.

José Di Paolo, noviembre de 2024

jose.dipaolo@uner.edu.ar

jdipaolo@ingenieria.uner.edu.ar

Prólogo de la primera edición

Como en toda vertiente de la Física, enseñar y aprender Mecánica de los Fluidos es una tarea ardua y ciertamente compleja. Los fundamentos teóricos, la necesidad de evidencia experimental y las aplicaciones a lo que ello da lugar a través de la ingeniería se presentan de un modo imbricado. A la hora de la enseñanza, los profesores deseamos satisfacer a los estudiantes en estos tres aspectos claves para que el aprendizaje sea el óptimo.

Este texto ofrece una teoría introductoria de Mecánica de los Fluidos siguiendo una construcción cuya estructura ha sido probada con muy buenos resultados durante varios años en dos cursos de carreras de ingeniería. Los capítulos dan cuenta de mis clases en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos (FI-UNER) para la carrera de Bioingeniería y la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional (FRSF-UTN) para la carrera de Ingeniería Industrial. Por ello, los ejemplos tendientes a aplicaciones ingenieriles refieren a una especialidad u a otra. En algunos temas he aprovechado la oportunidad para presentar y algunas veces inferir, cuestiones básicas relacionadas con la Mecánica del Sólido.

El texto no intenta reemplazar los libros clásicos de Mecánica de los Fluidos. Más aún, aquí se tributa a ellos porque han sido tomados como referencias. El objetivo entonces, ha sido elaborar un texto que refleje mi modalidad de dictado de los temas que, siguiendo a grandes autores de la temática, se basa en el desarrollo de formulaciones macroscópicas y microscópicas generales aplicables a la mayoría de los problemas. Luego, éstas se aplican a situaciones en que el modelo resultante pueda resolverse analíticamente.

Quiero agradecer a las dos instituciones mencionadas por la distinción que me confieren al permitirme enseñar en sus aulas, introduciendo cada año a nuevos alumnos en el mundo de la Mecánica de los Fluidos.

Agradezco también a los docentes de mis cátedras con quienes comparto muy buenos momentos al enseñar, investigar y por supuesto aprender en este campo de la Física y la Tecnología: Mag. Marcelo E. Berli (FI-UNER y FRSF-UTN), Ing. Agustín Brondino (FRSF-UTN) cuya colaboración fue imprescindible para la edición del texto, Dr. Diego M. Campana (FI-UNER) y Dr. Sebastián Ubal (FI-UNER). Finalmente, deseo que este libro sea de ayuda para aquellos que lo utilicen en el camino del aprendizaje de la Mecánica de los Fluidos.

J. D. P., marzo de 2013
jdipaolo@bioingenieria.edu.ar

Índice de temas

CAPITULO 1: Características Básicas de los Fluidos

1.1 La Mecánica de los Fluidos	1
1.2 Hipótesis de los medios continuos	3
1.3 La Mecánica de Materiales o Mecánica de los Medios Continuos	6
1.4 Definición de fluido y sólido desde un punto de vista mecánico	7
1.5 Parámetros materiales de los fluidos	8
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	24

CAPITULO 2: Notación y Álgebra Indicial

2.1 Introducción	27
2.2 Tensores	28
2.3 Notación indicial	29
2.4 Álgebra indicial	31
2.5 Teorema de la divergencia o de Gauss	35
2.6 Autovalores y autovectores de un tensor	35
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	39

CAPITULO 3: Cinemática de Fluidos

3.1 Introducción	41
3.2 Función de campo	41
3.3 Variaciones respecto al tiempo relacionadas con funciones de campo. Derivada Material	43
3.4 Velocidad de deformación en un flujo tridimensional	47
3.5 Velocidad de rotación en un flujo tridimensional	50
3.6 Tensor velocidad de deformación y tensor velocidad de rotación	50
3.7 Líneas características de un flujo	51
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	57

CAPITULO 4: Tensiones en Medios Continuos

4.1 Introducción	59
4.2 Principio del momento lineal para un medio continuo deformable	59
4.3 Vector de tensiones	62
4.4 El tensor de tensiones	71

4.5 Principio del momento angular y simetría del tensor de tensiones	75
4.6 Ley generalizada de Hooke	78
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	81
CAPITULO 5: Hidrostática	
5.1 Introducción	83
5.2 Tensiones en un fluido en condiciones estáticas	83
5.3 Ecuación diferencial de la hidrostática	86
5.4 Medición de presión con columna de líquido	88
5.5 Fuerza ejercida por fluidos sobre superficies planas y curvas	92
5.6 Movimiento de un fluido como un cuerpo rígido	100
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	105
CAPITULO 6: Balance Macroscópico de Masa	
6.1 Introducción	107
6.2 Teorema del transporte	108
6.3 Conservación de masa y ecuación de continuidad	113
6.4 Balance macroscópico o integral de masa	114
6.5 Balance macroscópico de masa en problemas estacionarios, con fluidos incompresibles y en volúmenes de control fijos	120
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	120
CAPITULO 7: Balance Macroscópico de Cantidad de Movimiento	
7.1 Introducción	123
7.2 Balance macroscópico o integral de cantidad de movimiento	124
7.3 Fuerza sobre una placa plana fija	128
7.4 Forma del balance macroscópico de cantidad de movimiento para volúmenes arbitrarios que se mueven con velocidad constante	131
7.5 Propulsión a chorro	132
7.6 Expresión general para la transformación de ecuaciones válidas para volúmenes materiales, en ecuaciones aplicables a volúmenes arbitrarios	134
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	136
CAPITULO 8: Balance Microscópico de Cantidad de Movimiento	
8.1 Introducción	137
8.2 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento	138
8.3 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento	

para fluidos	139
8.4 Ley de viscosidad de Stokes	141
8.5 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento para fluidos newtonianos incompresibles	144
8.6 Ecuación diferencial de elasticidad	157
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	161
CAPITULO 9: Balance Macroscópico de Energía Mecánica	
9.1 Introducción	163
9.2 Expresión diferencial del primer principio de la Termodinámica	163
9.3 Balance macroscópico de energía mecánica	164
9.4 Un esquema ingenieril simplificado del sistema circulatorio sanguíneo	169
9.5 El sistema circulatorio sanguíneo en condiciones de ingravidez	171
9.6 Aerosustentador. Un análisis preliminar usando los tres balances macroscópicos estudiados	172
9.7 El balance de energía mecánica y la ecuación de Bernoulli	174
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	175
CAPITULO 10: Análisis Dimensional y Similitud	
10.1 Introducción	177
10.2 El análisis dimensional	178
10.3 Teorema <i>II</i> de Buckingham	181
10.4 Similitud de flujos y experimentación sobre modelos	183
10.5 Adimensionalización de ecuaciones explícitas	185
10.6 Flujos externos: Conceptos básicos sobre Capa Límite	186
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	191
CAPITULO 11: Flujos Viscosos: Pérdida de Carga	
11.1 Introducción	193
11.2 El fenómeno de la pérdida de carga en tubos rectos de sección circular	194
11.3 El diagrama de Moody	196
11.4 Pérdida de carga en accesorios	198
11.5 Pérdida de carga total en una instalación	200
11.6 Solución de problemas de dimensionamiento de cañerías cuando las incógnitas son la pérdida de carga o el caudal circulante	201
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	202

CAPITULO 12: Máquinas Hidráulicas: Turbomáquinas de Impulsión

12.1 Introducción	203
12.2 Bombas de flujo radial o centrífugas	204
12.3 El fenómeno de cavitación	209
12.4 Sistema típico de cañerías de impulsión y conducción de líquidos	211
12.5 Curvas características de bombas centrífugas	217
12.6 Relaciones entre magnitudes características de las bombas centrífugas	223
12.7 Ventiladores, sopladores y compresores rotativos	224
12.8 Consideraciones acerca de ductos para aire	225
Preguntas para el repaso y la autoevaluación	226
Bibliografía	229

CAPITULO

1

Características Básicas de los Fluidos

1.1 La Mecánica de los Fluidos

En los diferentes grados de aproximación al estudio de las leyes que la Física propone como modelo de la naturaleza, la Mecánica ocupa el primer lugar en los procesos de enseñanza y aprendizaje, primer lugar que no sólo responde a la cronología del desarrollo conceptual de la disciplina, sino que es la base sobre la que se edificó la Física toda. Es así que se comienza estudiando los cuerpos sin forma ni tamaño, es decir la "partícula". Primero los movimientos con independencia de las interacciones en la denominada Cinemática, y luego, la relación que tienen las interacciones de un cuerpo con otros (fuerzas) en situaciones de equilibrio o en los cambios de sus condiciones de movimiento. Estos conceptos y leyes dan lugar a lo que se denomina Dinámica.

Una vez que la hipótesis de partícula ya no es capaz de responder a situaciones cinemáticas o dinámicas particulares, donde la forma y el tamaño tienen importancia y deben ser consideradas, como por ejemplo el simple caso de la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo, los modelos matemáticos de las leyes naturales asumen dichas características, pero asumiendo los cuerpos como rígidos. Es decir: la posición relativa de las partículas respecto a las otras no cambia por la acción de las cargas aplicadas (fuerzas y momentos). Esta idealización puede ser válida en dos situaciones: para cuerpos extremadamente

CAPITULO 1: CARACTERISTICAS BASICAS DE LOS FLUIDOS

rígidos o para cuerpos actuados por cargas mucho menores que aquellas que los deformarían apreciablemente.

Del mismo modo, la hipótesis de cuerpo rígido no es utilizable en los casos donde los cuerpos sufren deformaciones y éstas deben ser tenidas en cuenta. Por ejemplo: las piezas de un mecanismo que transmite fuerzas y movimientos deben dimensionarse de modo que sus deformaciones hagan posible la funcionalidad de dicho mecanismo, de lo contrario las grandes deformaciones podrían producir la inutilidad del mismo o bien la rotura de la pieza. Otro caso especial, que será el que nos ocupe, es el de los fluidos: gases y líquidos. Estos son cuerpos que se deforman permanentemente ante la acción de fuerzas de corte o tangenciales adquiriendo la habilidad de fluir y por lo tanto la de ser transportados a través de conductos y utilizados con diversos fines. El entendimiento de las leyes que gobiernan el movimiento de fluidos y su interacción con las paredes que los confinan es esencial para el análisis y diseño de cualquier sistema en donde un fluido es el elemento de trabajo.

El campo de estudio de los cuerpos sólidos deformables es la denominada Mecánica del Sólido y el otro, la llamada Mecánica de los Fluidos que es la denominación actual de una ciencia en realidad antigua en su origen y en sus realizaciones. Ambas se unifican en la Mecánica de Materiales que se edifica sobre un modo simplificado de entender la naturaleza constitutiva de la materia, esto es: la Hipótesis de los Medios Continuos.

Los principios de la Mecánica de los Fluidos se utilizan ampliamente en la ingeniería para el diseño de la forma óptima de aviones, barcos, automóviles y hasta los trenes de alta velocidad. Asimismo, en el diseño de turbomaquinaria como bombas (inclusive las de asistencia cardiaca), turbinas y hélices de todo tipo. En este último caso y en el de grandes estructuras, es usual el uso de modelos a escala para determinar las fuerzas interactivas fluido-estructura a los fines de un correcto dimensionamiento de las mismas. Son también ejemplos de utilización obligada de los fundamentos de la Mecánica de los Fluidos, el cálculo de sistemas de acondicionamiento de aire y todas aquellas instalaciones que presenten flujo de fluidos por conductos como las instalaciones hidráulicas o neumáticas, sin dejar de mencionar los contactos lubricados entre elementos de máquinas, lo cual es toda una subárea dentro de esta ciencia.

Desde un punto de vista más científico, los principios de la Mecánica de los Fluidos y sus leyes constitutivas para diversos tipos de fluidos, pueden ayudar a entender complejos mecanismos que la naturaleza ha creado en los múltiples tipos de organismos de los seres vivos. Estos están, en general, constituidos por agua que forma diversas estructuras y la base de otros fluidos como por ejemplo la sangre. Los seres humanos somos un 71% en promedio de agua y, a lo largo de nuestras vidas habremos bebido, también en promedio, unos 55.000 litros de agua. Las plantas pueden transportar los nutrientes desde la raíz a las hojas más extremas de su follaje gracias a la tensión superficial, que hace posible que el agua se eleve contra la gravedad por el entramado de tubos de muy pequeño diámetro presentes en los troncos y tallos. En aquellas de gran altura se suma un gradiente de presión entre la raíz y las hojas creado por el vacío relativo que

genera la evaporación de agua. Las plantas de gran porte pueden evaporar hasta 40 litros de agua al día para refrigerarse.

Respecto a la evolución histórica de la Mecánica de los Fluidos puede decirse que hasta el siglo XVI el conocimiento puramente empírico posibilitó a la humanidad desarrollar grandes obras como los acueductos, los sistemas de riego y eficientes naves para surcar los mares con fines comerciales o bélicos. A partir del siglo XVI y hasta el siglo XIX se desarrollaron lentamente los principios teóricos básicos del movimiento de fluidos; en el campo experimental también hubo aportes, fundamentalmente en el siglo XIX. La Mecánica de los Fluidos moderna aparece a principios del siglo XX como un esfuerzo por unir los avances teóricos y los experimentales. Esta es una ciencia analítico-experimental relativamente joven en la cual se están haciendo importantes aportes que se proponen al mundo científico a través de publicaciones especializadas en el ámbito de la Física y la Ingeniería; todo ello gracias a las enormes capacidades experimentales y computacionales, que han hecho que problemas que eran dejados de lado por su complejidad, actualmente se estén investigando.

1.2 Hipótesis de los medios continuos

Antes de establecer nuestra hipótesis fundamental, haremos algunas definiciones:

- 1) Materia es cualquier tipo de entidad física (cuerpo) que es parte del universo observable (ocupa un lugar que puede variar con el tiempo), posee masa y energías asociadas, es capaz de interactuar y ser susceptible a mediciones de acuerdo a patrones de medidas.
- 2) Sustancia pura es aquella que no se puede descomponer en otras mediante procedimientos físicos (como calentamiento o un campo magnético). Es posible que la sustancia pura se descomponga mediante procesos químicos. Si ello es posible, se dice que la sustancia es compuesta; en caso contrario, se dice que es una sustancia simple. Se llama mezcla al resultado de la combinación de varias sustancias puras, y es posible la separación de éstas mediante procedimientos físicos (destilación, evaporación, suspensión y filtración) y mecánicos (decantación e imantación).
- 3) Molécula es un conjunto de al menos dos átomos enlazados covalentemente que forman un sistema estable y eléctricamente neutro.
- 4) Átomo es la unidad de materia más pequeña de un elemento químico que mantiene su identidad o sus propiedades y que no es posible dividir mediante procesos químicos. Está compuesto por un núcleo atómico en el que se concentra casi toda su masa, rodeado por una nube de electrones. El núcleo está formado por protones, con carga positiva y neutrones, eléctricamente neutros. Los electrones, cargados negativamente, permanecen ligados al núcleo mediante la fuerza eléctrica.

CAPITULO 1: CARACTERISTICAS BASICAS DE LOS FLUIDOS

La materia está formada por moléculas, en el caso de materiales sólidos puros éstas están ubicadas generalmente siguiendo un ordenamiento en cristales mientras que en líquidos y gases poseen un movimiento errático. El espaciamiento entre las moléculas es mucho más grande que el tamaño de ellas por lo cual la materia es fundamentalmente hueca. No obstante, es un hecho experimental que, en espacios macroscópicos, la materia interactúa en términos promedios; así, por ejemplo, la presión de un gas en un recipiente es la fuerza promediada en la superficie debida a los choques de las moléculas sobre ella. Más aún, ciertos fenómenos (afortunadamente muchos) pueden explicarse sin ninguna referencia a la estructura molecular de los materiales, por ejemplo: la deformación de un metal frente a cargas o el caudal que sale por una canilla en nuestras cocinas.

Surge así la *Hipótesis de los Medios Continuos*, una hipótesis de fundamental importancia en la Mecánica de Materiales sobre la que se sustenta el modelo matemático que poco a poco iremos desarrollando en este libro. Esta hipótesis postula que la materia (en cualquier estado) es continua en el espacio que ocupa, de modo que si imaginamos sucesivas divisiones de dicho espacio la materia sigue conservando intactas todas sus propiedades. Es decir, cada pequeña porción de espacio se considera una partícula rodeada por otras partículas en contacto, por lo cual cualquier propiedad de la materia puede representarse por una función de las coordenadas y el tiempo, es decir, como funciones de campo. La hipótesis de los medios continuos es muy importante porque permite edificar un modelo mecánico de los materiales sobre la base de la matemática de las funciones continuas usufructuando la riqueza de los métodos creados para operar con ellas. En el entorno molecular, en cambio, cualquier fenómeno debe describirse sobre modelos fundados en razones probabilísticas, en otras palabras: incertidumbres.

Hemos dicho que en espacios macroscópicos la materia interactúa consigo misma y con otros cuerpos en términos promedios, la pregunta es entonces: ¿cuán pequeños pueden ser los espacios macroscópicos para que sea aplicable la hipótesis de los medios continuos? Para responder a esa pregunta imaginemos un trozo de material que subdividimos una y otra vez, hallando cada vez el valor de su densidad como sigue:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{M}{V} \quad (1.1)$$

El proceso será evidentemente monótono ya que el cociente entre la masa y el volumen de cada nuevo trozo más pequeño será del mismo valor que todos los anteriores; hasta que nos encontremos en tamaños volumétricos en los cuales ya puedan destacarse las moléculas y los inmensos espacios vacíos entre ellas. A partir de allí, en cada nueva partición será errática la cantidad de moléculas que aparezcan con lo cual el límite del cociente que veníamos calculando dará valores también erráticos.

La figura 1.1 muestra los resultados de esta experiencia que hemos imaginado donde el volumen ΔV^* , a partir del cual la densidad comienza a ser errática, es

1.2 HIPOTESIS DE LOS MEDIOS CONTINUOS

muy pequeño ya que, si fuese un cubo, tendría como arista un segmento del tamaño del camino libre medio molecular. Como un ejemplo, consideremos que en $1 \text{ [mm}^3\text{]}$ de aire hay del orden de 10^{16} moléculas y podríamos asegurar que aún esa porción es infinitamente divisible ya que en ΔV^* es un espacio que reúne aproximadamente unas 100 moléculas. El espacio macroscópico al cual nos referimos ya varias veces, puede ser tan pequeño como de unos pocos nanómetros en cada dimensión.

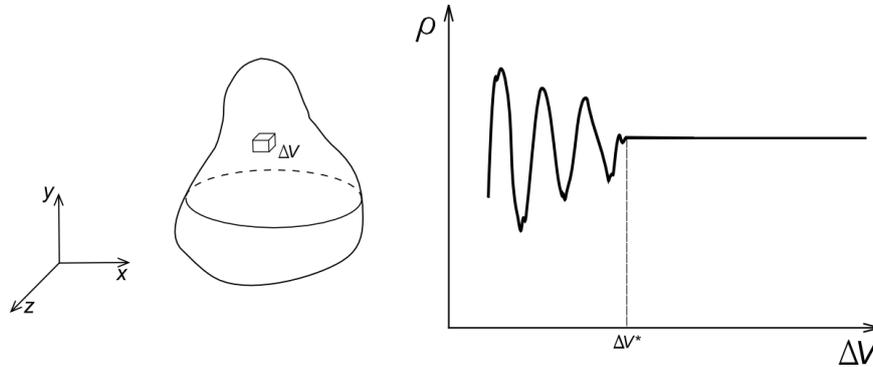


Figura 1.1: Definición conceptual de los límites de la hipótesis de los medios continuos.

Como en todas las cosas hay también excepciones y una de ellas es el flujo de gases muy enrarecidos (como los de la alta atmósfera) donde el camino libre medio molecular es del orden del metro [m], dimensión que viene a ser de un orden muy cercano a las dimensiones de cualquier cuerpo que interactúe con ese gas. En este caso las ecuaciones elaboradas sobre la base de funciones continuas, no serían aplicables.

En resumen, cuando el cociente entre el camino libre molecular y la longitud característica del sistema físico es mucho menor a la unidad, el material en estudio puede considerarse como un medio continuo. En caso contrario, si los efectos debidos a la naturaleza molecular de la materia no pueden ser despreciados deberán utilizarse otras herramientas analíticas (como la Mecánica Estadística). El esquema teórico que veremos en este libro como cuerpo conceptual de la Mecánica de los Fluidos estará fundado por completo en la hipótesis de los medios continuos.

1.2.1 El concepto de partícula en la hipótesis de los medios continuos

Mientras que la partícula de la Mecánica Clásica es discreta y contable, la partícula de la Mecánica del Continuo es continua e incontable.

La partícula de un medio continuo corresponde a un diferencial de masa (dM) encerrado en un diferencial de volumen (dV), localizado por un vector posición $\underline{r}(t)$. En los alrededores de la partícula y en contacto con ella, habrá otras partículas dando continuidad material al medio considerado. En $\underline{r}(t) + d\underline{r}(t)$ habrá otra partícula del mismo medio continuo, mientras $\underline{r}(t)$ no localice una frontera límite de dicho medio a partir de la cual comience otro medio distinto. Dado que

la masa dentro de cada diferencial de volumen ¹ puede ser distinta, adquiere importancia la masa específica o densidad ($\rho(\underline{r}, t)$) para expresar la variabilidad de la distribución de masa en el espacio que ocupa el medio continuo considerado.

En resumen, cuando hablemos del desplazamiento de una partícula de un medio continuo entenderemos el desplazamiento de un elemento de volumen que contiene muchas moléculas, aunque sea considerado como un punto.

1.3 La Mecánica de Materiales o Mecánica de los Medios Continuos

Una vez aceptada la hipótesis de los medios continuos puede establecerse toda una disciplina, cuya misión es la de estudiar la respuesta de los materiales a diferentes estados de carga. Su objeto de estudio puede dividirse en dos: 1) el establecimiento de los principios generales a todos los medios continuos y, 2) la elaboración de las ecuaciones constitutivas que vinculan las deformaciones y las fuerzas internas que solicitan un material.

Los principios generales son las leyes de la Física formuladas para un medio deformable, para la Mecánica estas son: la conservación de masa, el principio del momento lineal o segunda ley de Newton, el principio del momento angular o segunda ley de Newton para las rotaciones, el primer y el segundo principio de la Termodinámica. Estos pueden expresarse en términos integrales o macroscópicos sobre un volumen finito de materia continua, o en forma diferencial sobre una partícula del medio considerado. Las formulaciones integrales nos dan información promediada en el espacio de análisis (volumen de control) o sobre las áreas que lo rodean, mientras que las formulaciones diferenciales nos dan información punto a punto en el dominio de flujo. Dicho de otra manera, las formulaciones integrales dan cantidades como resultado mientras que las formulaciones diferenciales dan como resultado funciones.

La definición de las ecuaciones (también llamadas leyes) constitutivas que modelan el comportamiento de la materia en su interacción mecánica, conlleva siempre la idealización de los materiales reales. La ley constitutiva de los sólidos elásticos lineales (modelo válido para el acero y los metales en general), por ejemplo, se funda en que las *deformaciones* desaparecen cuando cesa la carga y que las mismas son proporcionales a las cargas actuantes. Asimismo, la ley constitutiva de los fluidos viscosos más sencillos desde el punto de vista dinámico (agua, aire y muchos hidrocarburos entre otros) -los llamados newtonianos- relaciona linealmente las fuerzas tangenciales por unidad de área con la *velocidad de deformación*.

Naturalmente, hay muchos tipos de materiales y por lo tanto muchas leyes o ecuaciones constitutivas, aunque las dos citadas son de gran aplicación en la mayoría de los problemas: porque los describen adecuadamente o son un primer nivel de aproximación. Las leyes constitutivas para un material pueden variar de

¹ Todos los diferenciales de volumen son idénticos y se los considera intrínsecamente positivos.

1.4 DEFINICION DE FLUIDO Y SOLIDO

acuerdo al nivel de cargas, por ejemplo, en los sólidos, frecuentemente hay rangos elásticos y rangos plásticos, donde las deformaciones son grandes y permanentes una vez que cesa la carga.

El requisito más importante para las formulaciones, tanto de los principios básicos como de las ecuaciones constitutivas es la invariabilidad con los sistemas coordenados. Esto se logra expresando las magnitudes físicas intervinientes a través de los entes matemáticos creados para ello: *los tensores*, cuyo estudio será la tarea de la cual nos ocuparemos en el próximo capítulo.

1.4 Definición de fluido y sólido desde un punto de vista mecánico

Supongamos la experiencia a la que refiere la figura 1.2. Esto es, una delgada capa de material sólido de altura h firmemente unida a la superficie inferior y a la cual se le aplica una fuerza tangente a la superficie superior de área A . Luego de aplicar la carga y para todo tiempo, el sólido se deformará angularmente (γ) alcanzando una configuración de equilibrio como indica la figura 1.2-a. Si la carga es removida, el sólido recuperará su forma original mientras no se hayan superado los límites de resistencia elástica.

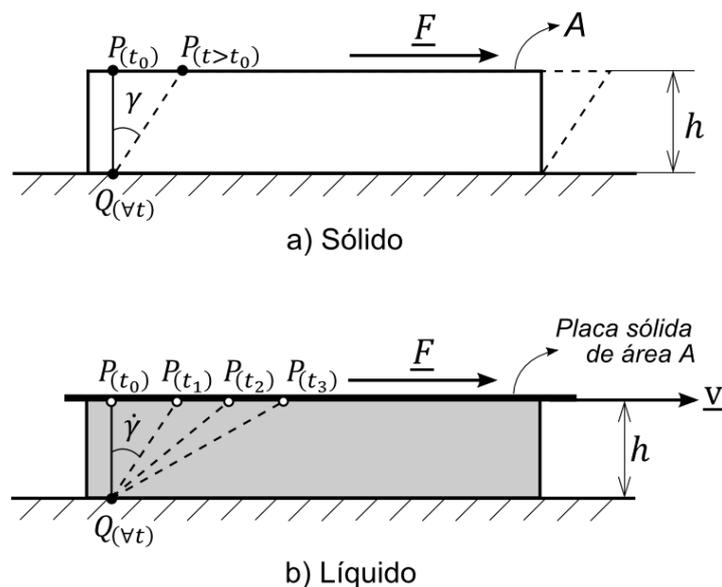


Figura 1.2: Diferenciación de los materiales sólidos y fluidos desde un punto de vista mecánico.
 a) material sólido, b) material fluido.

Si la experiencia se repite sobre una capa del mismo espesor, pero de líquido, la fuerza tangencial de intensidad F deberá aplicarse a través de una superficie sólida. Una vez hecho esto se observará que la superficie sólida se moverá a una velocidad de módulo V en la dirección de la fuerza, arrastrando al fluido adherido a ella mientras que las partículas en contacto con la superficie inferior seguirán en reposo por la misma razón: *la condición de adherencia o no deslizamiento* a la que nos referiremos nuevamente más adelante. Un punto como el P ocupará distintas posiciones con lo cual el fluido deberá deformarse continuamente

CAPITULO 1: CARACTERISTICAS BASICAS DE LOS FLUIDOS

mientras la carga tangencial esté actuando sobre él. Esta deformación angular continua ($\dot{\gamma}$) ante esfuerzos tangenciales es lo que le da a un fluido la característica denominada fluidez y por la cual puede ser transportado y a su vez transportar sus propiedades físicas, todo ello será motivo de estudio en próximos capítulos.

Una gran cantidad de fluidos, entre ellos los que llamaremos luego newtonianos, se deforman continuamente cuando se les aplica un esfuerzo de corte (o tangencial), sin importar cuán pequeño sea este esfuerzo. Esta es la razón por la cual los fluidos como el agua no tienen forma y toman aquella de los recipientes que lo contienen. Como se demostrará en el capítulo 4, las fuerzas tangenciales (tensiones tangenciales, en rigor) que surgen por el peso propio de los líquidos, impulsan su deslizamiento hasta llenar todo el espacio disponible limitado por las paredes de los recipientes.

El comportamiento mecánico que hemos discutido a partir de un líquido, también es propio de los gases, con lo cual la palabra fluidos involucra en términos prácticos a los líquidos y a los gases. La diferencia entre estos dos géneros de fluidos es la cohesión interna material (fuerzas intermoleculares) que hace que un líquido no cambie su volumen respecto a cambios de presión y si lo haga un gas donde dichas fuerzas son de muy pequeño valor respecto a la existente en líquidos. Recordemos aquel concepto cualitativo de la escuela primaria que hacía entendible este hecho mecánico natural de los fluidos: "los líquidos tienen tamaño y no poseen forma, los gases no tienen ni tamaño ni forma".

1.5 Parámetros materiales de los fluidos

Los parámetros materiales (llamados frecuentemente propiedades) son funciones o constantes que caracterizan y a la vez diferencian un material de otros del mismo tipo. En este libro introductorio definiremos los tres que habremos de usar a lo largo del mismo: dos parámetros absolutos y uno relativo al tipo de contacto con otros fluidos.

1.5.1 Densidad (ρ)

Ha sido definida en el ítem 1.2 como la relación entre la masa y el volumen que ésta ocupa. Se representa por una función escalar ya que no se requiere indicar direccionalidad alguna. Su unidad en el Sistema Internacional es el kilogramo por metro cúbico [kg/m^3].

Para los líquidos, la densidad de referencia habitual es la del agua líquida pura a la presión ambiental normal y a la temperatura de 4°C . En esas condiciones, la densidad absoluta del agua destilada es de 10^3 [kg/m^3], es decir, 1 [kg/l] ($\text{l} \rightarrow$ litro). Para los gases, la densidad de referencia habitual es la del aire en condiciones ambientales normales ($101,3$ [kPa] de presión, a 17°C y al nivel del mar) cuyo valor es de $1,225$ [kg/m^3].

En general la densidad puede ser función de las coordenadas y el tiempo, es decir ser una función de campo. A veces esta funcionalidad está implícita si a la densidad se la coloca como función de la temperatura o presión. En el caso de

los gases, la densidad es fuertemente dependiente de la presión y un caso particular es el del aire cuya densidad es muy variable con la altura debido al descenso de la presión atmosférica en las capas cada vez más enrarecidas de la atmósfera. Cuando tratamos con líquidos, la densidad es prácticamente constante, aunque puede variar con la temperatura y a muy altas presiones (por ejemplo, el agua en las profundidades de los océanos posee una densidad hasta un 20% superior que al nivel del mar). En la mayoría de nuestros problemas los sistemas serán isotérmicos y las condiciones de flujo no harán perceptible el cambio en la densidad.

Los flujos muy rápidos son compresibles y prueba de ello son las ondas de choque que se oponen al movimiento de cuerpos en el seno de fluidos. No obstante, esta característica debido al movimiento comienza a manifestarse a partir de velocidades cercanas a un tercio de la velocidad del sonido en dicho medio. En el aire a 20 °C y al nivel del mar, la velocidad del sonido es aproximadamente 340 [m/s], con lo cual los flujos de aire con velocidades hasta de 100 [m/s] pueden ser considerados como flujos incompresibles. Con más razón los flujos de líquidos donde la velocidad del sonido es del orden de 10^3 [m/s] (en agua a 20 °C la velocidad del sonido es de $1,498 \times 10^3$ [m/s]).

1.5.2 Viscosidad (μ)

Si recuperamos la experiencia tratada en el ítem 1.4 y representada en la figura 1.2-b, puede verse que, para un mismo fluido, si se aumenta la magnitud de la fuerza tangencial, la velocidad de equilibrio de la placa superior será cada vez mayor. Si a su vez se grafica la relación F/A respecto a la relación V/h para los distintos valores de la fuerza y la velocidad resultante, la línea que surja de la unión de los diferentes puntos será una recta que pasa por el origen si el fluido es agua u otro fluido de características similares, como muestra la figura 1.3.

La razón de la selección de las coordenadas V/h y F/A radica en la necesidad de normalización de la experiencia. Así, un punto de dicha gráfica es el mismo para distintas experiencias realizadas con el mismo fluido donde las relaciones V/h y F/A poseen el mismo valor, independientemente del valor aislado de F , A , V y h . Las relaciones constitutivas -en este caso para un fluido- expresadas entre variables específicas (fuerza por unidad de área y cambios de velocidad con relación a las coordenadas) permiten su aplicación en todos los casos similares al estudiado.

Si el experimento es repetido cambiando el fluido, la recta que se obtendrá será del mismo tipo, pero de distinta pendiente. Este resultado puramente experimental refleja el hecho de que la pendiente de la recta es un elemento distintivo y caracterizador de cómo un fluido se resiste a los esfuerzos tangenciales². Esta resistencia se evidencia en cuanto se acelerará y cuál será su velocidad final para

² De un modo más general, debe notarse que la viscosidad también actúa como resistencia a las tensiones de tracción que sufre un fluido, fenómeno que se manifiesta en deformaciones lineales en canales de sección variable. Como se verá en el Capítulo 8, para fluidos newtonianos la constante de proporcionalidad entre las deformaciones lineales y las tensiones de tracción es el doble de la viscosidad. Asimismo, vale notar que estas tensiones normales de origen viscoso son mucho más pequeñas que las tangenciales y suelen despreciarse en algunos análisis.

CAPITULO 1: CARACTERISTICAS BASICAS DE LOS FLUIDOS

un determinado esfuerzo cortante. Para el caso en estudio, una misma fuerza actuando sobre el área A , impulsará más rápido a la placa sobre agua que -por ejemplo- sobre miel. Por lo tanto, la pendiente de la recta que venimos discutiendo es un "parámetro material", intrínsecamente positivo, al que llamamos *viscosidad* y al que simbolizaremos con la letra griega μ . Dado que la viscosidad se define a partir de fluido en movimiento, en condiciones estáticas de reposo ésta no se manifiesta. Independientemente de la continuidad material que hemos postulado, cómo fenómeno característico del flujo, los efectos viscosos deben explicarse por el movimiento y colisiones moleculares de la sustancia fluida.

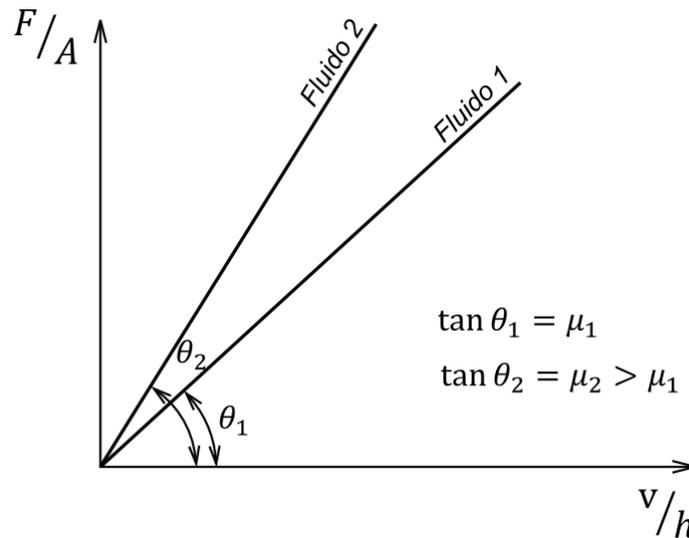


Figura 1.3: Comportamiento lineal de la relación entre las tensiones de corte y el gradiente de velocidad en un experimento de flujo unidimensional con fluido newtoniano.

De la misma gráfica de la figura 1.3 se desprende que la unidad de medida de la viscosidad en el Sistema Internacional es el $[\text{Pa s}]$ o $[\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}]$. Otra unidad de uso ingenieril es el Poise = 1 [P] = 10^{-1} [Pa s]. La viscosidad de los líquidos varía en un rango que va del orden de 10^{-3} [Pa s] a 100 [Pa s] y disminuye fuertemente con la temperatura, mientras que en los gases las viscosidades van desde aproximadamente 10^{-6} [Pa s] hasta 10^{-4} [Pa s], incrementándose a medida que aumenta la temperatura.

Si al cociente V/h lo llamamos tasa de deformación y a la relación F/A la llamamos esfuerzo cortante (τ), la relación entre ambas, lineal o no lineal, permitirá dividir los fluidos en dos categorías: 1) Fluidos newtonianos y 2) Fluidos no newtonianos.

Un hecho casual:

El metal por excelencia en la construcción es el acero, el cual a la temperatura de colada (vaciado) -entre $1,5 \times 10^3$ y $1,6 \times 10^3$ °C- posee una viscosidad que es prácticamente la del agua en condiciones ambientales. Este hecho -casual- permite el estudio del flujo del acero colado en canales, a través de modelos

experimentales a escala que utilizan agua. Los fundamentos del uso de modelos a escala se verán en el capítulo 10.

1.5.2.1 Fluido newtoniano

Es un fluido cuya viscosidad puede considerarse constante respecto a la tasa de deformación y el tiempo. La relación entre el esfuerzo versus su tasa de deformación es lineal y pasa por el origen como lo muestra la figura 1.3. Muchos fluidos se comportan como newtonianos en condiciones normales de presión y temperatura como por ejemplo el aire y el agua. Otros fluidos como ciertos hidrocarburos destilados y líquidos de base acuosa también son newtonianos. La dependencia de la viscosidad respecto a la temperatura y presión no altera en general la característica newtoniana.

Se ha dicho que un fluido se deforma angularmente ante los esfuerzos de corte. La velocidad de deformación angular o tasa de corte, si bien ha sido definida en el ítem anterior, puede determinarse planteando la variación temporal del ángulo γ de la figura 1.2-b:

$$\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V \Delta t}{h} \frac{1}{\Delta t} = \frac{V}{h} \quad (1.2)$$

Es decir que el gradiente de velocidad del flujo es quien mide la velocidad de deformación angular del fluido. Genéricamente, para cualquier flujo unidimensional de un fluido newtoniano, se cumple la siguiente la relación:

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (1.3)$$

1.5.2.2 Medida de la viscosidad de un fluido newtoniano

Se ha dicho que la viscosidad es un parámetro material que se hace evidente en condiciones de flujo, por lo cual su medida debe surgir de un flujo conocido, controlado y predecible. La medida de la viscosidad es en sí indirecta, dado que su valor surge de la medida de alguna variable con la cual ella se relaciona directamente. Los aparatos destinados a tal fin se denominan viscosímetros, por ejemplo, el de la figura 1.4, formado por dos cilindros concéntricos de largo L en movimiento relativo. El flujo inducido en el estrecho canal que separa ambos cilindros, debido al giro del cilindro externo, requerirá en condiciones estacionarias un torque para mantener constante la velocidad de rotación. Dicho torque puede conocerse a través de la potencia entregada al viscosímetro y la velocidad de giro.

En vistas de que el espesor del canal es mucho más pequeño que el radio de los cilindros, podemos desprestigiar la curvatura del canal y aproximar la velocidad de deformación que experimenta el fluido al valor que tendría entre dos placas paralelas que se moviesen con la misma velocidad relativa:

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega R_e}{R_e - R_i} = \frac{\omega R_e}{h} \quad (1.4)$$

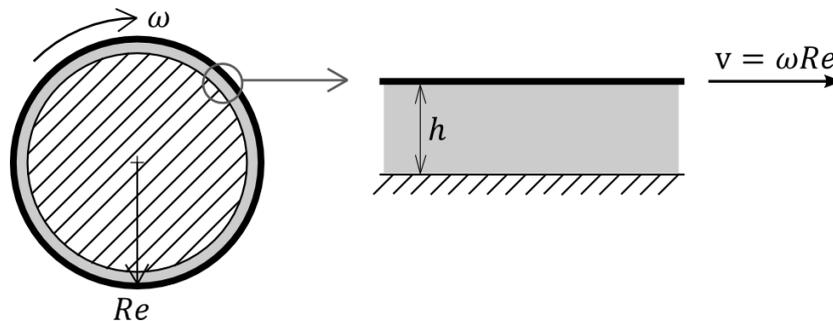


Figura 1.4: Esquema de un viscosímetro de cilindros concéntricos.

Luego, el torque necesario para mantener el movimiento será el que produzcan las tensiones de corte actuando en el área interior del cilindro externo, respecto al centro del dispositivo:

$$T = \mu \frac{\omega R_e}{h} 2 \pi R_e L R_e = \frac{P}{\omega} \quad (1.5)$$

De la medición de la velocidad angular ω , los parámetros geométricos del viscosímetro y la potencia P , surgirá indirectamente la viscosidad del fluido como:

$$\mu = \frac{P h}{2 \pi \omega^2 L R_e^3} \quad (1.6)$$

Las unidades de μ serán [Pa s] si P se mide en [W], las longitudes en [m] y la velocidad angular en [s^{-1}].

1.5.2.3 Fluidos no newtonianos

Son aquellos fluidos que presentan una relación no lineal entre la tensión tangencial y la velocidad de deformación. Esta es la gran generalidad de los fluidos donde la variedad de comportamientos mecánicos es muy grande y es objeto de estudio de la disciplina llamada "Reología". Desde ella se aborda el estudio experimental de la respuesta mecánica de los fluidos (básicamente con un aparato llamado reómetro) para luego proponer expresiones matemáticas que modelen el fenómeno. Tales expresiones se denominan leyes o ecuaciones constitutivas y sirven a la Mecánica de los Fluidos como insumo para modelar y a través de ello predecir el flujo de un fluido con estas características.

Hay ejemplos de fluidos no newtonianos que se presentan en nuestra vida cotidiana, entre ellos pueden mencionarse las pinturas sintéticas, que se adelgazan deslizándose cuando se aplican con un pincel. Otro ejemplo es la pasta dentífrica que no sale del tubo a menos que se supere un valor de tensión umbral para que

comience a deslizar, hasta allí se comporta como un sólido para luego comenzar a fluir.

El comportamiento no lineal entre tensión tangencial y velocidad de deformación puede incluso ser dependiente del tiempo. Entre los que no presentan esta particularidad podemos hablar genéricamente de tres clases cuyas curvas representativas se ven en la figura 1.5.

Dilatantes: son aquellos que se vuelven más resistentes al movimiento conforme se incrementa la velocidad de deformación. Se vuelven más y más viscosos como aquellos preparados culinarios que al batirlos se espesan haciendo cada vez más difícil la operación (por ejemplo, la crema Chantilly).

Pseudoplásticos: son aquellos que se vuelven menos resistentes al movimiento conforme se incrementa la velocidad de deformación. Se vuelven menos viscosos. Algunos fluidos biológicos tales como el líquido sinovial (lubricante natural de las articulaciones óseas) y la sangre son pseudoplásticos. En el primer caso, cuando la velocidad relativa entre las partes en contacto aumenta, la velocidad de deformación es mayor y por lo tanto la viscosidad resulta menor. Esto parece un comportamiento natural inteligente porque cuando ocurre este hecho es porque el ser está moviéndose vertiginosamente por la inminencia de un ataque hacia él o de él hacia otro animal. La sangre por su parte, se vuelve menos viscosa cuando circula por grandes vasos de modo de beneficiar la circulación y el intercambio que ello lleva aparejado.

Un caso ingenieril:

Durante la construcción de un oleoducto en la provincia de Mendoza las tuberías y bombas habían sido rigurosamente calculadas en sus dimensiones y potencias respectivamente. Dada una falta de provisión de las tuberías utilizadas y habiendo disponibilidad de tuberías de mayor diámetro, los ingenieros decidieron utilizarlas porque: "un mayor diámetro de tubería significaría una disminución del trabajo de bombeo". Esto es cierto cuando el fluido es newtoniano porque la viscosidad es invariable con la velocidad de deformación. El problema fue que, cuando el oleoducto comenzó a utilizarse, las bombas no podían impulsar los caudales esperados incluso con mayor requerimiento de potencia. El fenómeno se produjo porque el petróleo es pseudoplástico y al hacerlo circular por un tubo de mayor diámetro disminuyó la velocidad de deformación (porque disminuyó la velocidad media y aumentó el radio del tubo) y por lo tanto aumentó la viscosidad y todas las pérdidas de energía asociadas a ello. Lo que originalmente pareció beneficioso resultó luego en desventaja porque hubo que utilizar mayor energía de bombeo.

Plásticos de Bingham: presentan una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación una vez que se ha superado un determinado valor de esfuerzo cortante llamado tensión umbral. Es el clásico comportamiento de la pasta dentífrica aludido más arriba.

CAPITULO 1: CARACTERISTICAS BASICAS DE LOS FLUIDOS

Un modelo matemático genérico para las características no newtonianas de pseudoplasticidad y dilatancia, es la llamada ley de potencia, que para un flujo unidimensional se expresa de la siguiente forma:

$$\tau = m \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^n \tag{1.7}$$

donde m y n se denominan índice de consistencia e índice de comportamiento del flujo respectivamente. Si $n > 1$ el fluido es dilatante, si $n < 1$ el fluido es pseudoplástico y en el caso en que $n = 1$, $m = \mu$ y se recupera el modelo newtoniano. Si la ecuación (1.7) se expresa como:

$$\tau = m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} = \eta \frac{dv_x}{dy} \tag{1.8}$$

a $\eta = m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1}$ se la denomina viscosidad aparente.

La viscosidad aparente en las curvas genéricas de la figura 1.5, puede definirse de distintos modos. Uno es tomar como viscosidad aparente a la pendiente de las curvas en un determinado punto de las mismas. Otro es tomar la pendiente de la recta que une el origen y el punto en cuestión. Lo importante es ver que en los fluidos dilatantes la viscosidad aparente crece y en los pseudoplásticos decrece. En las referencias [13] y [14] Ud. encontrará un modelo del flujo de lubricación de una prótesis de rodilla donde el fluido se modela como pseudoplástico, con parámetros materiales correspondientes al fluido sinovial.

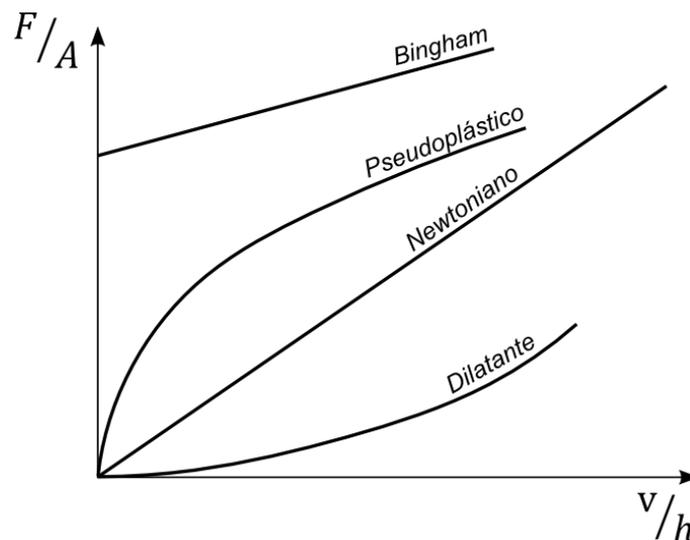


Figura 1.5: Curvas genéricas de la relación entre tensión tangencial y velocidad de deformación independientes del tiempo, para fluidos no newtonianos.

Si, además, la viscosidad aparente depende del tiempo, el problema es aún más complejo, aunque podemos hablar de dos grandes grupos de fluidos: los "tixotró-

picos" que reducen su viscosidad aparente con el tiempo y los "reopécticos" para los cuales ocurre lo contrario. Estas variaciones ocurren aún a tensiones cortantes constantes.

Existen materiales intermedios entre sólidos y fluidos llamados "viscoelásticos", es decir que desde el punto de vista mecánico pueden presentar elasticidad y también viscosidad. Algunos son más elásticos y otros más viscosos, esto es, algunos son más cercanos a los sólidos y otros más cercanos a los fluidos. En el primer caso tenemos como ejemplo a los cartílagos articulares y algunos elastómeros, mientras que en el segundo caso podemos mencionar las masas de panificación y el nylon fundido para la fabricación de hilos en la industria textil que, para fluir, deben ser traccionados y por ende estirados.

Por último, se define la viscosidad cinemática (ν) como cociente entre la viscosidad y la densidad ($\nu = \mu/\rho$). Su unidad en el SI es el $[m^2/s]$ y en el sistema CGS es el Stokes ($1 \text{ St} = 1 [cm^2/s] = 0,0001 [m^2/s]$)³.

1.5.3 Tensión superficial (σ)

En el seno de un líquido cada molécula está sometida a fuerzas de atracción ejercidas por las moléculas vecinas que son del mismo tipo en los casos de fluidos puros. Por ello, la fuerza de atracción neta sobre cada molécula es prácticamente nula y su estado energético, bajo. No obstante, cuando un líquido entra en contacto con otro no miscible o con un gas, el contacto se produce a través de una superficie llamada *interfase* donde las moléculas que la componen quedan sujetas a una fuerza neta perpendicular a la interfase. Si uno de los fluidos es un gas, dicha fuerza se dirigirá hacia el seno del fluido debido a la gran diferencia de densidades entre el líquido y el gas que hace que la atracción de las moléculas de este último sea muy pequeña frente a la otra. La figura 1.6 esquematiza las atracciones antes mencionadas.

Debido a que en la interfase hay menos moléculas con las cuales interactuar, ello se compensa con enlaces más fuertes entre moléculas vecinas conduciendo a un estado de tracción superficial. Como hecho natural, el sistema tratará de disminuir su energía total disminuyendo la superficie interfacial. La interfase se comporta entonces como una membrana "sin espesor" traccionada en todo punto con la misma tensión en todas las direcciones: *la tensión superficial*. Como resultado de minimizar la superficie, el líquido reduce la curvatura de la misma disminuyendo su energía de deformación (las interfaces rectas son las de menor energía porque poseen la menor curvatura, esto es: cero) dependiendo de la forma de la interfase, de las condiciones de contacto entre los fluidos y de las paredes del recipiente que los contiene. Generalmente, en problemas de pequeña escala (del orden del milímetro) la tensión superficial curva la interfase para equilibrar diferencias de presión a un lado y otro de la misma como se verá más adelante.

³ Por lo pequeñas de las cantidades expresadas en St, suele utilizarse el centi-Stokes ($1 \text{ cSt} = 0,01 \text{ St}$).

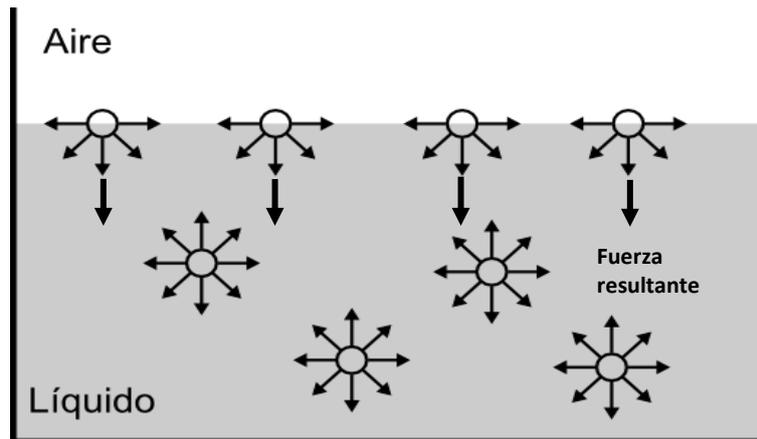


Figura 1.6: Esquema de la atracción que sufren las moléculas en el interior de un fluido y su interfase cuando está en contacto con un gas.

Cabe remarcar que la tensión superficial es característica de cada fluido dependiendo con que otro fluido inmiscible haga contacto y es constante en toda la interfase. Su valor depende de la magnitud de las fuerzas intermoleculares en el seno del líquido, por lo que, cuanto mayor sean las fuerzas de cohesión del líquido, mayor será su tensión superficial. Por ejemplo, si comparamos tres líquidos tales como hexano (cuyas fuerzas intramoleculares son muy débiles, del tipo de Van der Waals), agua (que tiene interacciones intramoleculares un poco más intensas, interacciones de puente de hidrógeno) y mercurio (el cual está sometido a enlace metálico, que es mucho más intenso que en los otros dos casos) veremos que la tensión superficial crece en el siguiente orden: hexano, agua y mercurio. La tensión superficial posee unidades de $[N\ m^{-1}]$ o $[J\ m^{-2}]$ ya que puede interpretarse como una fuerza por unidad de longitud debido a que la interfase no posee espesor, o como una energía de deformación por unidad de área. Por ejemplo: la tensión superficial del agua es $72,8 \times 10^{-3}\ [N/m]$, la del mercurio es $484 \times 10^{-3}\ [N/m]$ y la del hexano $18,4 \times 10^{-3}\ [N/m]$, valores todos correspondientes a contacto con aire.

Veamos algunos ejemplos de la vida cotidiana que involucran la tensión superficial ⁴:

1) Un ejemplo de fenómeno debido a la tensión superficial es el caso de un alfiler que puede flotar sobre la superficie del agua, a pesar de que la densidad del acero es mucho mayor que la del agua. Cuando el alfiler logra hundirse, cae al fondo con la punta hacia abajo porque perfora la interfase donde se ejerce la tensión superficial.

2) Otro ejemplo es que la existencia de la tensión superficial hace posible la formación de gotas. Vimos que la tensión superficial es un fenómeno de superfi-

⁴ Se anima al lector a revisar múltiples materiales audiovisuales en internet -de procedencia validada- que muestran estos fenómenos. En los siguientes enlaces podrá ver una foto y tres videos realizados por el autor:
https://drive.google.com/file/d/1tP-CitjqJ9KmMrxy6y0qbYqVKIHtkEMz/view?usp=drive_link
https://drive.google.com/file/d/1I1chH1Av7McBg_dUH-PV-GyXJ9NcjJTW/view?usp=drive_link
https://drive.google.com/file/d/1ce5VTNyDCs12TwtYHK-9Wv9OkJ25Y142/view?usp=drive_link
https://drive.google.com/file/d/1PEIoAtRBYmNojerlxfGxYsMmspd0YG52/view?usp=drive_link

cie y es la tendencia de un líquido a disminuir su superficie hasta que su energía superficial sea mínima y así el equilibrio sea estable. Como la esfera presenta un área mínima para un volumen dado, entonces por la acción de la tensión superficial, la tendencia de una porción de un líquido es la de formar una esfera o una superficie curva (menisco) cuando el líquido está en contacto con un recipiente.

Consideremos el caso de una gota de agua rodeada por una membrana perfectamente esférica en aire estanco a presión atmosférica (p_0). Evidentemente, para que la membrana esté curvada de esa forma, la presión interior p_i debe ser mayor que la presión p_0 en el exterior de la gota. Las tensiones de membrana soportan la diferencia de presión evitando que la gota estalle. La figura 1.7 muestra una gota de agua asumida como perfectamente esférica (en rigor esto ocurriría en un estado de ingravidez) y el diagrama de cuerpo aislado de la mitad superior. Haciendo un corte imaginario de la gota a través de su ecuador, se ven las presiones interna y externa y las tensiones de membrana que satisfacen el equilibrio.

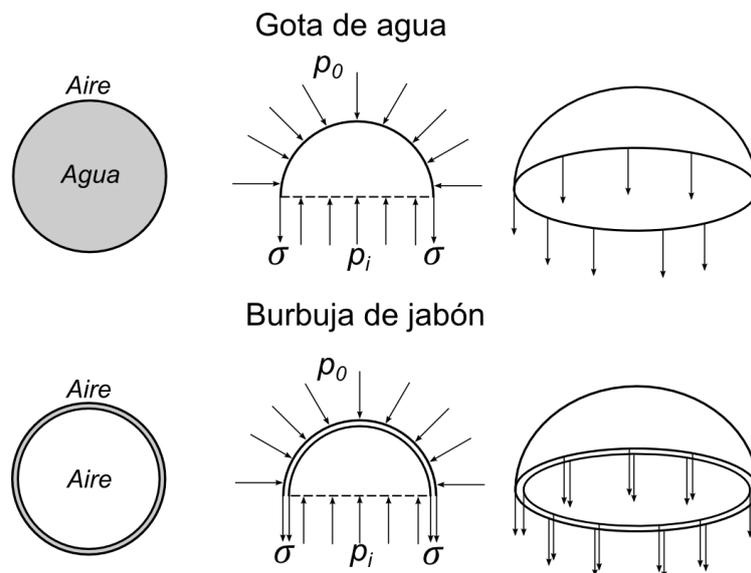


Figura 1.7: Diagramas de cuerpo aislado de una gota de agua y una burbuja de agua jabonosa, supuestas perfectamente esféricas.

Planteando el equilibrio de fuerzas

$$\sum_1^n \underline{F}_i = 0$$

$$(p_i - p_0) \pi R^2 = \sigma 2 \pi R$$

Donde R es el radio de la gota, y σ es la tensión superficial. El área proyectada de la superficie interior y exterior de la gota, surge porque sólo actúan las componentes de fuerza de presión en la dirección vertical, las componentes

CAPITULO 1: CARACTERISTICAS BASICAS DE LOS FLUIDOS

horizontales se anulan porque aparecen de a dos en posiciones diametralmente opuestas. La suma (integral) de las componentes verticales de presión actuando en toda la semiesfera, es igual al producto de la presión por el área proyectada sobre un plano perpendicular a la dirección vertical. Esta consideración se clarificará cuando veamos, en el capítulo dedicado a hidrostática, el cálculo de las fuerzas de presión sobre áreas planas y curvas. La tensión superficial, como fuerza por unidad de longitud, actúa sobre el perímetro del corte. Podemos expresar la diferencia de presión entre el interior de la gota y el medio exterior según:

$$\Delta p = (p_i - p_0) = \frac{2 \sigma}{R} \quad (1.9)$$

Se puede ver de esta manera la dependencia de la diferencia de presiones con el radio de la gota; si R es muy pequeño, la diferencia de presión será muy elevada. Es decir, la presión en el interior de una gota pequeña es mayor que la presión dentro de una gota de mayor tamaño. Las gotas de mercurio, debido a la alta tensión superficial, suelen ser inestables cuando superan un cierto tamaño y ante cualquier causa externa se dividen en gotas más pequeñas de modo que se cumpla la ecuación (1.9). Del mismo modo, si imaginamos una experiencia con gotas a las que se les reduce la presión exterior, estas se subdividirán en gotas más pequeñas de modo de satisfacer el equilibrio que impone la ecuación (1.9). Si la diferencia de presión aumenta debido a que la presión externa disminuye permaneciendo constante σ , debe disminuir R .

En micromecánica, esferas de muy pequeño diámetro para cojinetes de bolas (conocidos vulgarmente como rulemanes) se producen con una tecnología fundada en el fenómeno de tensión superficial del metal fundido, estado de ingravidez (logrado por ejemplo por campos magnéticos contrarios al gravitacional) y manejo de la presión ambiental. Así, es posible construir relojes mecánicos de alta precisión, entre otros objetos tecnológicos.

Prosiguiendo con esto, si ahora consideramos el caso de una burbuja de agua jabonosa veremos que existen dos membranas: una interior y otra exterior, debido a que en su interior la burbuja también posee aire. Realizando un planteo semejante al de la gota de agua:

$$\sum_1^n F_i = 0$$

$$(p_i - p_0) \pi R^2 = 2 \sigma 2 \pi R$$

$$\Delta p = (p_i - p_0) = \frac{4 \sigma}{R} \quad (1.10)$$

Se obtiene el resultado de que la presión interior de una burbuja de agua jabonosa es el doble que la correspondiente a una gota de agua de igual radio.

Las burbujas jabonosas se forman debido a que el jabón es un surfactante o tensioactivo que disminuye la tensión superficial del agua y, por efecto Marangoni ⁵, estabiliza la membrana haciendo posible y durable la burbuja.

1.5.3.1 Ecuación de Laplace para membranas elásticas de pequeño espesor

De manera más general podemos obtener la ecuación que relaciona la tensión superficial, el cambio de presión interfacial y la forma, para una interfase con simetría axial genérica, donde en todo punto habrá dos radios de curvatura según dos direcciones mutuamente perpendiculares. La figura 1.8 muestra un elemento diferencial aislado de una interface tridimensional con simetría axial cortado con cuatro planos perpendiculares a la superficie curva; dos que cortan en la dirección circunferencial y dos que lo hacen en direcciones meridionales. Sobre los cuatro cortes actúa la tensión superficial que, gracias a la curvatura de la superficie, compensa la fuerza que la diferencia de presión hace desde el lado cóncavo hacia el convexo.

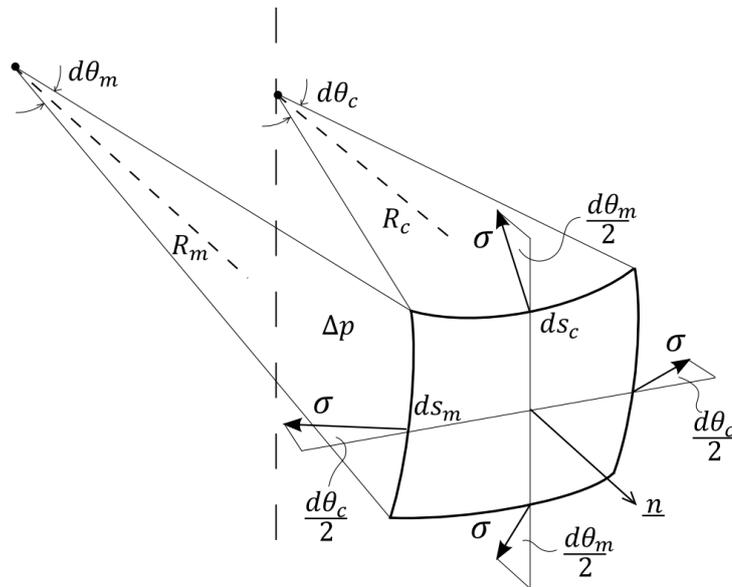


Figura 1.8: Un elemento de superficie de una interface curva con simetría axial.

El elemento aislado tiene proporciones diferenciales dadas por ds_m y ds_c , con radios de curvatura R_m y R_c en las direcciones meridional y circunferencial respectivamente. El arco ds_m subtende un ángulo $d\theta_m$ en la curvatura meridional y el arco ds_c subtende un ángulo $d\theta_c$ en la curvatura circunferencial. Luego, planteando el equilibrio de fuerzas en la dirección normal a la interfase y haciendo las aproximaciones que correspondan a ángulos pequeños ⁶, se tiene:

⁵ El efecto Marangoni es la transferencia de masa en una interfase entre dos fluidos debido a un gradiente de tensión superficial. Un líquido con una baja tensión superficial tenderá a fluir hacia otro de mayor tensión superficial siempre que estén en contacto. Coloque una gota de detergente en un recipiente con agua y experimentará este fenómeno.

⁶ El seno y la tangente de un ángulo pequeño son iguales al valor del ángulo expresados en radianes.

$$\Delta p \, ds_m \, ds_c - 2 \sigma \, ds_c \frac{d\theta_m}{2} - 2 \sigma \, ds_m \frac{d\theta_c}{2} = 0 ; \, ds_m = R_m \, d\theta_m ; \, ds_c = R_c \, d\theta_c$$

Reemplazando y dividiendo miembro a miembro por la superficie del elemento, se tiene:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_c} \right) \tag{1.11}$$

La ecuación (1.11), es la denominada *ecuación de Laplace*. En el caso particular de una membrana esférica, la simetría se convierte en polar y los dos radios de curvatura son iguales. Reemplazando R_m y R_c por R en la ecuación (1.11), surge el resultado de la ecuación (1.9).

Un caso fisiológico: los alveolos pulmonares

La tensión superficial tiene una fuerte influencia sobre el comportamiento mecánico del pulmón. Las fuerzas de tensión superficial son capaces de desestabilizar la película líquida que recubre interiormente las vías aéreas en la búsqueda de un estado de menor energía superficial y causar el cierre de estos conductos debido a la formación de un puente líquido o lentícula (ver figura 1.9). La formación de un puente líquido mantiene un volumen de gas atrapado en el pulmón, lo que finalmente limita la cantidad de aire que puede ser inspirado y espirado. Naturalmente, el cierre de las vías aéreas por este mecanismo ocurre más frecuentemente cerca del fin de la espiración cuando el diámetro de los bronquiolos es más pequeño. De esta manera, el cierre durante la espiración, y la subsecuente reapertura durante la inspiración hacen que la capacidad pulmonar para acomodar el volumen de aire sea alternativamente mejorada y disminuida durante el ciclo respiratorio.

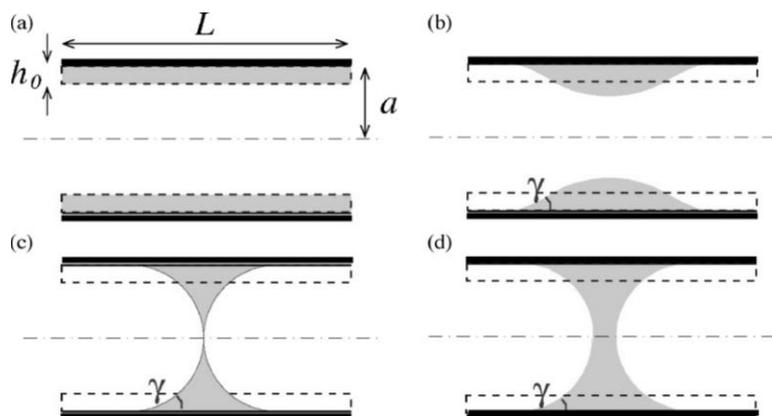


Figura 1.9: Posibles configuraciones de equilibrio de un recubrimiento de líquido en un conducto de aire axisimétrico: a) película de líquido uniforme, b) película de líquido en forma de onda, en la primera fase de la desestabilización, c) puente líquido mínimo formado por la desestabilización de la interfase, d) puente líquido grueso que cierra completamente el conducto. Resultados tomados de *Respiratory Physiology & Neurobiology* 163 (2008) 214–221 (Authors M. Heil et al.).

Este fenómeno se da frecuentemente en personas asmáticas en las cuales la afección produce alteraciones en la tensión superficial del moco que recubre los

1.5 PARAMETROS MATERIALES DE LOS FLUIDOS

alvéolos pulmonares, aumentándola. Ello produce la desestabilización y cierre de los conductos aéreos con la consecuente imposibilidad para inhalar, el ahogo, la tos y la sensación de asfixia. Los medicamentos que son administrados por vía aérea a través de aerosoles son, en definitiva, tensioactivos que buscan contrarrestar los efectos de la enfermedad reduciendo la tensión superficial del moco y posibilitando la reapertura de los alveolos. Frecuentes ataques de este tipo tienen un impacto negativo sobre el corazón, deteriorándolo y predisponiéndolo a una insuficiencia que suele derivar en la muerte súbita de muchos de estos enfermos.

La figura 1.10 muestra la evolución de la interfase en un modelo de vía aérea. El modelo tiene geometría axisimétrica y la forma de la interfase se predice en cada instante a través de la dinámica del flujo del fluido que recubre interiormente el conducto y la ecuación de Laplace (ec. (1.11)). La interfase pasa de perfectamente cilíndrica a un onduloide que cierra el tubo, en fracciones de segundo.

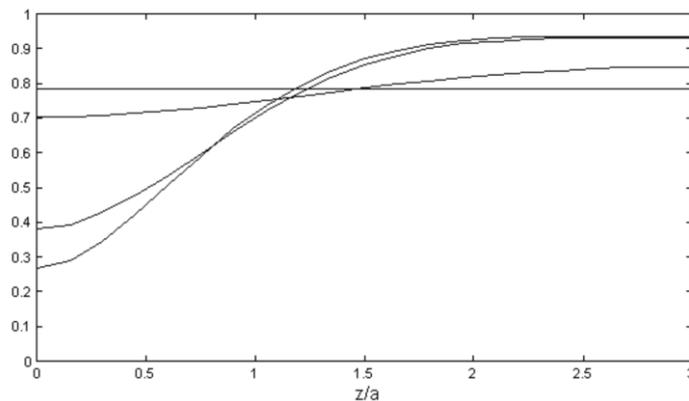


Figura 1.10: Evolución de la interfase de un fluido que recubre interiormente un conducto axisimétrico de longitud infinita, como modelo de un alveolo pulmonar. En la abscisa la longitud respecto al radio del tubo y en ordenadas la posición radial adimensional. Cuando la interfase se desestabiliza produce el cierre del conducto en fracciones de segundo. Resultados tomados de las Memorias del Congreso Argentino de Bioingeniería realizado en Bs. As. en 1999 (Autores S. Ubal, D. Campana, J. Di Paolo y C. Corvalán).

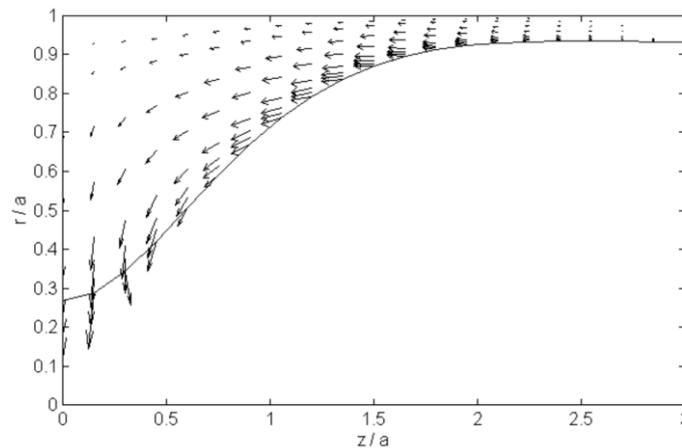


Figura 1.11: Campo de velocidades del flujo correspondiente a la figura 1.10 en los últimos estadios de la desestabilización. Obsérvense las altas velocidades del fluido en la cresta de la onda buscando el centro del tubo.

1.5.3.2 Ascenso capilar

Otra propiedad de los líquidos que depende de su tensión superficial es la "capilaridad", que le confiere la capacidad de subir o bajar por un tubo capilar. Así, cuando un líquido asciende por un tubo capilar, ello se debe a que las fuerzas intermoleculares son menores que la adhesión del líquido con el material del tubo y es el caso de los líquidos "que mojan las paredes", por ejemplo el agua en contacto con vidrio que en ese caso se comporta como hidrofílico. El líquido seguirá ascendiendo hasta que el peso del líquido que llena el tubo equilibre a la fuerza de tensión superficial. Sin embargo, cuando las fuerzas entre las moléculas de un líquido son más fuertes que la adhesión al capilar (como el caso del mercurio en contacto con vidrio), la tensión superficial hace que el líquido descienda a un nivel inferior, y su superficie sea convexa. Se dice que el líquido no moja o el sólido es hidrofóbico.

El "ángulo de contacto" es el ángulo que forma la superficie de un líquido al entrar en contacto con un sólido. El valor del ángulo de contacto depende principalmente de la relación que existe entre las fuerzas adhesivas entre el líquido y el sólido y las fuerzas cohesivas del líquido. Este ángulo será menor que 90° cuando los sólidos sean hidrofílicos. De lo contrario, para los sólidos hidrofóbicos⁷, el ángulo de contacto será mayor que 90° . En lo sucesivo éste será un dato a obtener de tablas construidas a partir de observaciones experimentales.

La medida directa de un ángulo de contacto es una medición eminentemente geométrica. Una forma de hacerlo para agua y vidrio o mercurio y vidrio, sería colocar una gota de cada uno en un portaobjeto y tomar una fotografía digital con muy buena definición, que luego pueda manipularse con algún software gráfico a los fines de medir el ángulo de contacto. La fotografía sería similar a la figura 1.12.

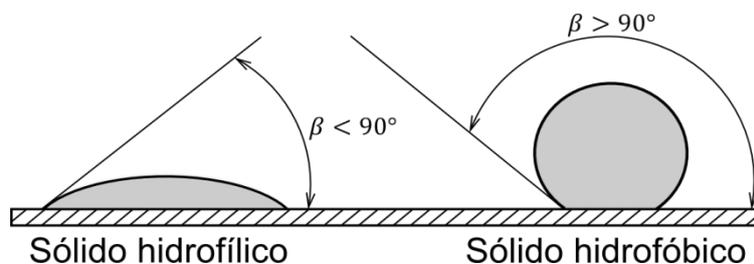


Figura 1.12: Esquema de la apariencia de una gota de líquido sobre un material hidrofílico (agua sobre vidrio) y de una gota de líquido sobre un material hidrofóbico (mercurio sobre vidrio). Se ven los ángulos de contacto menor a 90° y mayor a 90° respectivamente.

Un esquema del ascenso capilar que produce un líquido en un tubo de material hidrofílico se ve en la figura 1.13. Para estudiar este fenómeno podemos partir de la satisfacción de:

$$\sum_1^n F_i = 0$$

Que aplicado a nuestro caso particular se transforma en:

⁷ Con las denominaciones "hidrofílico" e "hidrofóbico", a veces se hace referencia a los fluidos y no a los sólidos.

$$\sigma \pi d \cos \beta - \pi \frac{d^2}{4} h \rho g = 0$$

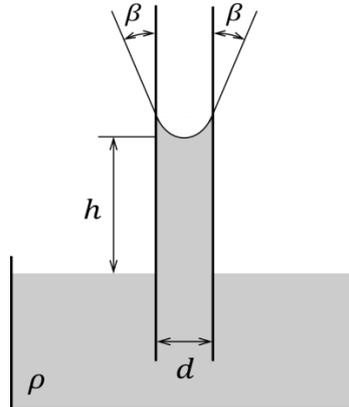


Figura 1.13: Esquema del ascenso capilar de un líquido en un tubo de material hidrofílico.

Si suponemos como datos los parámetros materiales del fluido y el diámetro del tubo, puede obtenerse el ascenso capilar h como:

$$h = \frac{4 \sigma \cos \beta}{d \rho g} \quad (1.12)$$

Evidentemente, cuando d tiende a cero el ascenso tiende a infinito. Si bien esto es una idealización, podría decirse que con una estructura de capilares lo suficientemente delgados, sería posible elevar agua hasta 10,3 [m] de altura en condiciones atmosféricas (ver el capítulo Estática de Fluidos). Otro ejemplo -de la vida cotidiana- es la absorción de un líquido derramado en una mesa mediante una tela porosa, donde los poros hacen las veces de tubos capilares que permiten que el agua ascienda en contra de la gravedad. Por último, en un estado de ingravidez, un recipiente conteniendo líquido no podría estar abierto puesto que las fuerzas capilares impulsarían el líquido a salir por la boca del recipiente.

La ecuación (1.12) es válida también para los casos en que el ángulo de contacto sea mayor a 90° . En ese caso el $\cos \beta$ será negativo y h representará un descenso capilar.

1.5.3.3 Medida de la tensión superficial

Similarmente a la medida de la viscosidad, la determinación de la tensión superficial es indirecta y ello puede hacerse desde la medición de una fuerza equilibrante de la fuerza de tensión superficial o bien de un ascenso capilar, entre otros métodos. Esta práctica experimental requiere de aptitudes y capacidades técnicas experimentales específicas debido a que, en general, los fenómenos de capilaridad se producen en pequeñas escalas dimensionales. Entre los métodos de medición más usados para tensiones superficiales mayores a 0,01 [N/m], pueden mencionarse al anillo de Dunoy, la gota colgante y el método de la burbuja.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) Explique el razonamiento de abstracción de los cuerpos en Mecánica, desde el concepto de partícula aislada hasta el de medio continuo deformable.
- 2) Establezca la hipótesis de los medios continuos, aportando ejemplos que la sostengan y ejemplos que la limiten en su aplicabilidad.
- 3) ¿Cuál es el concepto de partícula en la Mecánica de los medios continuos?
- 4) ¿En qué consiste la Mecánica de los materiales? ¿Cuáles son sus objetivos?
- 5) ¿Por qué para materiales sólidos se habla de deformaciones y en materiales fluidos se habla de velocidades de deformación? Explique con un esquema de ambos materiales sujetos a cargas.
- 6) Esquematice la experiencia de Newton y a partir de allí, los fluidos newtonianos y no newtonianos.
- 7) En una gráfica tensión-velocidad de deformación correspondiente a un fluido en flujo unidimensional, ¿qué significa que la gráfica comience en el punto (0,0)? Explique con un ejemplo.
- 8) Defina la viscosidad a partir de la experiencia de Newton y establezca sus unidades en el SI así como otras de uso técnico.
- 9) ¿Podría Ud. dar un sentido físico a la inversa de la viscosidad?
- 10) Suponga un fluido newtoniano de viscosidad muy baja. ¿Ud. podría tener con él un flujo puramente viscoso?, ¿cómo?
- 11) ¿Qué significa que un fluido sea pseudoplástico?, ¿y que sea dilatante? Aporte ejemplos de cada uno.
- 12) ¿Qué significa la tensión umbral en ciertos fluidos? ¿Cómo los clasificaría a estos fluidos? Construya una gráfica donde se visualice claramente la tensión umbral y aporte ejemplos.
- 13) Explique en qué consisten las características de los fluidos tixotrópicos y los fluidos reopépticos.
- 14) Caracterice los fenómenos interfaciales entre dos fluidos y defina la tensión superficial.
- 15) Defina el ángulo de contacto entre fluidos y sólidos y a partir de allí, la hidrofilia y la hidrofobia. Realice un esquema.
- 16) Una interfase deformada por la tensión superficial a partir de una forma inicial de equilibrio, ¿tendrá mayor o menor área?
- 17) En una interfase plana entre dos fluidos, ¿puede decirse que las presiones a ambos lados son distintas?

1.5 PARAMETROS MATERIALES DE LOS FLUIDOS

- 18) Usualmente recibimos ofertas televisivas de utensilios de cocina recubiertos con materiales con propiedades antiadherentes (la comida no se pega). ¿Como definiría estos materiales desde la óptica del contacto con fluidos? Esquematice.
- 19) Suponga dos gotas de agua, una con diámetro mayor que la otra. Si Ud. pudiese unir las con un conducto muy fino que atravesase las superficies de ambas. ¿Habría circulación de fluido de una hacia la otra? En caso afirmativo, ¿en qué sentido circularía y cuándo finalizaría el drenaje?
- 20) Una gota de agua se divide en gotas más pequeñas si se hace descender la presión ambiental. ¿Por qué?
- 21) Compare las presiones interiores entre una gota de agua y una burbuja de jabón del mismo radio. Suponga la misma tensión superficial.
- 22) ¿En qué casos el ascenso capilar podría ser un descenso capilar?
- 23) Suponga una superficie horizontal mojada con agua. ¿Debido a que fenómeno el agua es absorbida por un paño o papel que se coloque encima?

Página intencionalmente en blanco.

CAPITULO

2

Notación y Algebra Indicial

2.1 Introducción

Las expresiones matemáticas de las leyes de la Física, particularmente en el ámbito de la Mecánica de los Medios Continuos, relacionan magnitudes de un modo operacional que es y debe ser independiente de los sistemas coordenados de referencia. Es decir: cualquier observador debe poder obtener los mismos resultados o las mismas conclusiones a partir de las leyes de la Física, independientemente del sistema de referencia elegido.

Tal requisito se cumple gracias a los entes matemáticos creados para representar magnitudes físicas según su naturaleza. Así: magnitudes como la masa o la energía son representables por números, es decir "escalares"; magnitudes como la velocidad, la aceleración, la fuerza o la cantidad de movimiento, donde es necesario el valor o intensidad de la magnitud, su dirección y su sentido de actuación, se representan por "vectores" que son entes que quedan unívocamente definidos a partir de tres números; por último, magnitudes como el gradiente de una función vectorial o los esfuerzos (tensiones) en punto, son representadas unívocamente por nueve números que constituyen las componentes del denominado "tensor de segundo orden". Todos ellos poseen características de invariancia respecto a los ejes coordenados, los escalares son invariantes de por sí porque no requieren establecerse respecto a sistemas de referencia, los vectores poseen un invariante que es su módulo, éste no cambia al

cambiar el sistema coordenado; y los tensores de segundo orden poseen tres invariantes que serán presentados más adelante.

Genéricamente hablando debemos decir que todos los entes matemáticos son tensores, de distinto orden o rango según la naturaleza de lo que vaya a representarse y sus invariantes aseguran el cumplimiento del requisito de invariancia de las leyes físicas respecto a los sistemas de referencia.

2.2 Tensores

Como se ha dicho, tensores son los entes matemáticos en general y su orden determina la cantidad de elementos numéricos que se requieren para establecer el tensor. Así, la cantidad de estos elementos es 3^N donde 3 es la cantidad de dimensiones del espacio y N es el orden del tensor. Un escalar es un tensor de orden cero y se representa sólo por un número; un vector es un tensor de orden 1, se representa con tres números y posee un invariante; un tensor de orden dos se representa por nueve números y tiene tres invariantes que estableceremos más adelante. ¿Existen tensores de mayor orden? Sí, por ejemplo, el parámetro elástico de un material completamente inhomogéneo y anisotrópico (que resiste distinto a un mismo esfuerzo según la dirección en que éste actúa) es un tensor de cuarto orden; nosotros no emplearemos tensores de mayor orden que dos, excepto el llamado tensor alternante (de orden tres) como un auxiliar para resolver indicialmente el producto vectorial entre dos vectores.

Los tensores se representan por matrices, el vector se representa por una matriz fila $[1 \times 3]$ o una matriz columna $[3 \times 1]$; el tensor de segundo orden se representa por una matriz cuadrada de $[3 \times 3]$ mientras que un tensor de tercer orden (con 27 elementos numéricos) se representaría con un arreglo espacial de $[3 \times 3 \times 3]$. Un tensor de cuarto orden (con 81 elementos numéricos) ya no es representable espacialmente. Por ejemplo, un tensor de segundo orden sería:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

2.2.1 Magnitudes que requieren ser representadas por tensores de segundo orden

Supongamos una función vectorial de las coordenadas espaciales como por ejemplo un campo de velocidades en un flujo, tal que $\underline{v} = \underline{v}(x, y, z)$. Si además cada componente de ese campo vectorial es una función escalar de las tres coordenadas ($v_x = v_x(x, y, z)$, $v_y = v_y(x, y, z)$, $v_z = v_z(x, y, z)$), entonces pueden calcularse tres variaciones de cada componente respecto a las coordenadas, es decir que habrá tres gradientes de velocidad por cada componente y nueve en total. El gradiente de velocidad en este caso y de un campo vectorial en general, es un tensor de segundo orden y por lo tanto se representa por una matriz de $[3 \times 3]$. En notación tensorial, el gradiente de velocidad se simboliza $(\underline{\nabla} \underline{v})$, el vector

gradiente y el vector velocidad a la par pero sin ningún símbolo operacional en medio. Esto es una "diada" o "producto externo", sobre la que volveremos luego. Así, la expresión (2.2) condensa todas las variaciones posibles del vector \underline{v} respecto a las coordenadas en primera instancia; existen por supuesto variaciones de otros órdenes expresados en derivadas segundas en adelante, pero estas no forman parte del gradiente de la velocidad ¹.

$$\underline{\nabla} \underline{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Una propiedad de los tensores con componentes reales

Una propiedad muy importante de todo tensor de componentes reales es que puede ser escrito como un tensor simétrico más un tensor antisimétrico tal como se muestra a continuación. Dividiendo en dos mitades el tensor y sumando y restando la mitad de su transpuesto, se tiene:

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{T}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{T}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{T}}^T - \frac{1}{2} \underline{\underline{T}}^T = \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \quad (2.3)$$

Donde el primer sumando del 3º término de (2.3) es la parte simétrica del tensor $\underline{\underline{T}}$ y el segundo sumando es la parte antisimétrica. Esta propiedad la usaremos para mostrar que el tensor velocidad de deformación de un flujo es el doble de la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad. Dicha parte simétrica será empleada para establecer la ecuación constitutiva de los fluidos newtonianos, ligándola en una relación proporcional lineal con el tensor de tensiones viscosas.

2.3 Notación indicial

La notación indicial fue creada para compactar ecuaciones y simplificar la operatoria, sobre todo en ecuaciones o sistemas de ecuaciones que poseen muchos términos e involucran tensores. La notación permite reducir la información de un sistema complejo a unos pocos términos que se pueden manejar con mayor claridad y prolijidad. Para ello existen una serie de reglas que permiten extraer la información contenida en dichas ecuaciones, particularmente cuando están expresadas en la forma más compacta posible: la notación tensorial. Es casi un concepto economicista: el de escribir lo más abreviado posible, más aún si consideramos que al escribir en forma compacta ecuaciones largas y laboriosas, se

¹ Este ordenamiento es arbitrariamente elegido y está en consonancia con las reglas operacionales que se definen más adelante.

CAPITULO 2: NOTACION Y ALGEBRA INDICIAL

reduce la posibilidad de cometer y arrastrar errores, como por ejemplo signos o términos incompletos.

Consideremos un vector expresado en coordenadas cartesianas como:

$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$. Si asimilamos x a 1, y a 2 y z a 3, y de igual modo, llamamos \underline{e}_1 a \underline{i} , \underline{e}_2 a \underline{j} y \underline{e}_3 a \underline{k} , puede escribirse

$$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \underline{e}_i$$

dado que el índice i se repite, puede eliminarse el símbolo sumatoria y expresar el vector simplemente como $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$ en lo que se conoce como convención de suma o de Einstein. Tomando la regla algebraica y computacional para denominar a las variables enteras, identificaremos los índices con las letras i, j, k, l, m y n .

Asimismo, el tensor de la expresión (2.1) puede expresarse como la siguiente suma, primero extendida, luego en sumatoria y finalmente por convención de suma:

$$\begin{aligned} \underline{T} &= T_{11} \underline{e}_1 \underline{e}_1 + T_{12} \underline{e}_1 \underline{e}_2 + T_{13} \underline{e}_1 \underline{e}_3 + T_{21} \underline{e}_2 \underline{e}_1 + T_{22} \underline{e}_2 \underline{e}_2 \\ &+ T_{23} \underline{e}_2 \underline{e}_3 + T_{31} \underline{e}_3 \underline{e}_1 + T_{32} \underline{e}_3 \underline{e}_2 + T_{33} \underline{e}_3 \underline{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j = T_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

En la expresión (2.4), los productos $(\underline{e}_i \underline{e}_j)$ son los denominados tensores unitarios, constituidos por el producto de dos versores unitarios del sistema coordenado considerado. Como se ha dicho, ese producto sin operador indicado entre los versores se llama "producto diádico" o "externo" y el tensor resultante es tal que sus componentes surgen del producto entre las componentes de los versores. El modo del producto es el siguiente: los elementos de la primera fila del tensor se obtienen de multiplicar la primera componente del primer versor, sucesivamente por las componentes del otro; lo mismo ocurre con la segunda y tercera filas (ver nota a pie de página número 1). Es decir, el primer factor domina las filas y el segundo las columnas. El tensor gradiente de velocidad es por lo tanto un tensor surgido del producto diádico entre el vector gradiente (u operador nabla) y el vector velocidad. El producto diádico no está reservado a versores, el mismo es posible entre cualesquiera dos vectores.

Algunos tensores unitarios lucirían entonces:

$$(\underline{e}_1 \underline{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; (\underline{e}_2 \underline{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; (\underline{e}_3 \underline{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Cabe aclarar que los índices en la notación toman siempre los valores 1, 2 o 3, que son las dimensiones del espacio.

2.4 Álgebra indicial

El álgebra indicial constituye un conjunto de reglas operativas generadas a fin de descomprimir y compactar expresiones desde y hacia la notación vectorial y tensorial. Esta última es la forma más compacta de expresar ecuaciones que tienen un gran número de términos y, en cada término, factores operando entre sí. Si bien existe un buen número de reglas para resolver distintas operaciones entre vectores y tensores, nosotros estudiaremos el producto escalar entre vectores, entre vectores y tensores, y entre tensores; también estudiaremos la forma de resolver indicialmente los términos dentro de un producto vectorial entre vectores. Con el estudio de estos productos cubriremos las necesidades de notación y álgebra indicial para las expresiones que nosotros iremos desarrollando a largo de los temas, generalmente en coordenadas cartesianas.

Producto escalar entre dos vectores

Consideremos el producto escalar de dos vectores: el \underline{a} y el \underline{b} . Utilizando la notación indicial como convención de suma esto es:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i \underline{e}_i \cdot b_j \underline{e}_j \quad (2.6)$$

La primera regla impone utilizar nombres distintos para los índices que definen cada factor. Nótese que para el vector \underline{a} se ha utilizado el índice i y para el \underline{b} se ha utilizado el índice j . La segunda regla impone "contraer" los versores más próximos al punto indicativo del producto, puede parecer antojadizo pero la regla es tal, para que la operatoria desemboque el proceso algebraico en las expresiones que deben ser. En este caso aplicar la regla puede parecer trivial porque hay solo dos versores y por supuesto que son los más cercanos al punto operador del producto escalar, pero más adelante cobrará sentido. La contracción implica multiplicar los versores escalarmente, es decir: $(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)$. Este producto dependerá de los valores que tomen i y j , es decir, siempre que i y j sean iguales el producto entre los versores dará 1 y si son distintos el producto dará cero. Luego, $(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)$ condensa las siguientes 9 posibilidades:

$$\begin{array}{lll} (\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1) = 1; & (\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2) = 0; & (\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3) = 0; \\ (\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1) = 0; & (\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2) = 1; & (\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3) = 0; \\ (\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_1) = 0; & (\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_2) = 0; & (\underline{e}_3 \cdot \underline{e}_3) = 1. \end{array}$$

Entonces, cuando se contraigan dos versores, ello podrá representarse por el símbolo denominado delta de Kronecker que se define así: $\delta_{ij} = 1$, si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$. Por lo tanto, el delta de Kronecker, permite cambiar un índice por el otro, en nuestro caso el índice i por el j o viceversa. Luego:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.7)$$

CAPITULO 2: NOTACION Y ALGEBRA INDICIAL

Que es el resultado que ya conocemos acerca del producto escalar entre dos vectores: la sumatoria de los productos entre componentes homólogas, que cumple con la propiedad de ser conmutativo.

Hay un producto escalar, entre otros, que aparecerá con frecuencia en nuestros desarrollos analíticos y que tiene un sentido físico muy importante: la condición de incompresibilidad de un flujo. Esta condición se establece sobre el campo de velocidades y se expresa como la divergencia del campo de velocidades igualada a cero.

Antes de continuar con ello, presentemos el operador vectorial nabla:

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \quad (2.8)$$

donde se ha asimilado x_1 con x , x_2 con y y x_3 con z . Luego, la divergencia del campo de velocidades será:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \cdot v_j \underline{e}_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

Producto que se ha resuelto similarmente al expresado en la ecuación (2.7).

Producto escalar entre un vector y un tensor

Un producto escalar que aparecerá cuando veamos las expresiones macroscópica (o integral) y microscópica (o diferencial) del principio del momento lineal (o segunda ley de Newton), es el del tensor de tensiones operando sobre una dirección indicada por un versor. Expresemos la operación tensorialmente e indicialmente para operar con ella siguiendo la regla de la contracción de los versores más próximos al punto escalar:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = T_{ij} (\underline{e}_i \underline{e}_j) \cdot n_k \underline{e}_k = T_{ij} n_k \delta_{jk} \underline{e}_i = T_{ik} n_k \underline{e}_i \quad (2.10)$$

Para valorar la conmutatividad del producto de la expresión (2.10) debemos resolver el producto a la inversa, esto es el versor operando sobre el tensor.

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{T}} = n_k \underline{e}_k \cdot T_{ji} (\underline{e}_j \underline{e}_i) = n_k T_{ji} \delta_{kj} \underline{e}_i = T_{ki} n_k \underline{e}_i \quad (2.11)$$

Las expresiones (2.10) y (2.11) serán iguales solo si $T_{ik} = T_{ki}$, es decir si el tensor es simétrico. Sólo en ese caso el producto escalar entre un tensor y un vector es conmutativo. Obsérvese que en la expresión (2.11) se utilizaron los índices de modo de que el resultado resulte directamente comparable al de (2.10).

Productos escalares de interés en Mecánica de los Medios Continuos entre un vector y un tensor

Un producto escalar de mucha importancia en Mecánica de los Medios Continuos, particularmente cuando estos son fluidos, es la contracción del campo de velocidades con su gradiente. Como veremos, tal producto representa la aceleración de las partículas de fluido debido a la variación de la velocidad con las coordenadas. Veamos:

$$\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} = v_i \underline{e}_i \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_j} (\underline{e}_j \underline{e}_k) = v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \delta_{ij} \underline{e}_k = v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \underline{e}_k \quad (2.12)$$

El poder de compactación que posee la notación tensorial del primer miembro de (2.12) queda de manifiesto si desplegamos el último miembro expresado en notación indicial, al que hemos llegado a través del álgebra que estamos presentando. Dicho miembro implica una suma en i para cada valor de k . Esto es:

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} = v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \underline{e}_k = & \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 \\ & + \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \underline{e}_2 \\ & + \left(v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sin la herramienta que nos ofrece esta notación y esta álgebra, deberíamos arrastrar los nueve términos, formados por productos, cada vez que trabajemos con ellos.

Otro producto escalar entre vector y tensor de utilidad para nosotros es la contracción del operador nabla sobre el tensor de tensiones, es decir la divergencia del tensor de tensiones. Ello aparecerá cuando tratemos con el principio de cantidad de movimiento lineal en sus expresiones integral y diferencial.

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{T} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \cdot T_{jk} (\underline{e}_j \underline{e}_k) = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \delta_{ij} \underline{e}_k = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \underline{e}_k \quad (2.14)$$

Doble producto escalar entre dos tensores

La doble contracción de dos tensores de segundo orden aparece cuando se modela la disipación de energía de carácter viscoso, la que se representa por la doble contracción de la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad consigo mismo. Por ejemplo:

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{Q}} = T_{ij} (\underline{e}_i \underline{e}_j) : Q_{kl} (\underline{e}_k \underline{e}_l) = T_{ij} Q_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} = T_{ij} Q_{ji} \quad (2.15)$$

donde, siguiendo la regla, se han contraído primero los versores \underline{e}_j y \underline{e}_k (los más próximos al operador) y luego los versores \underline{e}_i y \underline{e}_l .

Una regla para determinar el orden tensorial de productos escalares

No lo hemos destacado, pero se ve que el producto escalar entre dos vectores da como resultado un escalar, el producto escalar entre un tensor y un vector da como resultado un vector, y la doble contracción de dos tensores termina en un escalar. Si asignamos al punto que indica el producto el valor (-2), la suma algebraica de los órdenes de los tensores y los valores de los productos involucrados, dará el orden del tensor resultado. Así:

Para dos vectores, $1 + 1 + (-2) = 0$, es decir que se obtiene un escalar

Para un vector y un tensor (o viceversa): $1 + 2 + (-2) = 1$, se obtiene un vector

Para dos tensores doblemente contraídos: $2 + 2 + (-2) + (-2) = 0$, se obtiene un escalar

Aunque no lo vimos, la simple contracción de un tensor con otro dará como resultado un tensor de segundo orden. Esto es: $2 + 2 + (-2) = 2$.

Producto vectorial entre dos vectores. El tensor alternante

El tensor alternante es un tensor de tercer orden cuyas componentes valen 1, 0 ó -1. Se define de la siguiente forma:

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \varepsilon_{ijk} (\underline{e}_i \underline{e}_j \underline{e}_k) \tag{2.16}$$

Y sus elementos serán tales que cumplan la siguiente regla:

$\varepsilon_{ijk} = 1$, si i,j,k siguen una de las siguientes secuencias: 1,2,3; 2,3,1 ó 3,1,2

$\varepsilon_{ijk} = -1$, si i,j,k siguen una de las siguientes secuencias: 1,3,2; 2,1,3 ó 3,2,1

$\varepsilon_{ijk} = 0$, si entre i,j,k hay al menos dos iguales

Luego,

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \underline{e}_k \varepsilon_{ijk}$$

donde el orden de la secuencia del ε es (1,2,3); (2,3,1) ó (3,1,2) porque ese es el orden en que aparecen en la expresión. Por ello el $\varepsilon_{ijk} = 1$.

$$\underline{e}_j \times \underline{e}_i = \underline{e}_k \varepsilon_{jik}$$

Donde $\varepsilon_{jik} = -1$, con lo que se cumple la no conmutatividad del producto vectorial,

Finalmente:

$$\underline{a} \times \underline{b} = a_i \underline{e}_i \times b_j \underline{e}_j = (a_i b_j) (\underline{e}_i \times \underline{e}_j) = \varepsilon_{ijk} (a_i b_j) \underline{e}_k \tag{2.17}$$

Donde para cada valor de k los índices i y j sólo pueden tomar los otros dos (para retener los ε_{ijk} no nulos), es decir:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \varepsilon_{ijk} (a_i b_j) \underline{e}_k = (a_2 b_3 \varepsilon_{231} + a_3 b_2 \varepsilon_{321}) \underline{e}_1 + (a_1 b_3 \varepsilon_{132} + a_3 b_1 \varepsilon_{312}) \underline{e}_2 + (a_1 b_2 \varepsilon_{123} + a_2 b_1 \varepsilon_{213}) \underline{e}_3$$

Atendiendo a las secuencias indicadas arriba para establecer el valor de los ε_{ijk} , se llega a:

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \underline{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \underline{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underline{e}_3$$

Que es la forma conocida del producto vectorial.

2.5 Teorema de la divergencia o de Gauss

Las expresiones macroscópicas de las leyes que desarrollaremos en adelante, usualmente contendrán cantidades surgidas de la evaluación sobre el volumen o espacio de análisis (que se denominarán volúmenes de control) y sobre las áreas que rodean dicho espacio. Es más, será valioso poder relacionar variaciones que ocurren en el volumen con flujos que pasan a través de las áreas que lo encierran. Al respecto será una herramienta muy valiosa el teorema de la divergencia (o teorema de Gauss) que permite transformar integrales de superficie en integrales de volumen (y viceversa), siempre que el volumen sea el encerrado por dichas áreas. Si G es una función de campo escalar, vectorial, o tensorial, podemos expresar dicho teorema de la siguiente forma:

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot G \, dV = \int_A \underline{n} \cdot G \, dA \quad (2.18)$$

Nosotros usaremos el teorema para los tres tipos de funciones de campo: la presión (escalar), la velocidad (vector) y el tensor de tensiones. Las expresiones con las que trabajaremos serán:

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot p \, dV = \int_A \underline{n} \cdot p \, dA$$

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \, dV = \int_A \underline{n} \cdot \underline{v} \, dA$$

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{T} \, dV = \int_A \underline{n} \cdot \underline{T} \, dA$$

2.6 Autovalores y autovectores de un tensor

En el punto 2.4 hemos trabajado indicialmente con productos escalares entre un tensor y un vector, que dan como resultado otro vector. Una manera en que se suele definir un tensor de segundo orden matemáticamente es diciendo que éste

CAPITULO 2: NOTACION Y ALGEBRA INDICIAL

es una transformación lineal que asigna a cada vector, otro vector. Si este vector asignado es proporcional a aquél sobre el que se realizó la transformación lineal, se dice que el vector es un autovector y el coeficiente de proporcionalidad un autovalor. Es decir, si ocurre que:

$$\underline{T} \cdot \underline{n} = \lambda \cdot \underline{n} \quad (2.19)$$

El vector \underline{n} es -entonces- un autovector y λ un autovalor. λ es un escalar perteneciente a los números reales. Todo vector proporcional a \underline{n} es también un autovector. Esto es:

$$\underline{T} \cdot (\alpha \underline{n}) = \alpha \underline{T} \cdot \underline{n} = \alpha \lambda \cdot \underline{n} = \lambda (\alpha \cdot \underline{n}) \quad (2.20)$$

Luego, puede demostrarse que cada tensor de 2º orden posee 3 autovalores y 3 autovectores:

$$\underline{T} \cdot \underline{n} = \lambda \cdot \underline{n} = \lambda (\underline{I} \cdot \underline{n}), \quad \text{donde } \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ es el tensor identidad}$$

o lo que es lo mismo,

$$(\underline{T} - \lambda \underline{I}) \cdot \underline{n} = 0 \quad (2.21)$$

Si operamos sobre la ecuación (2.21) utilizando la notación y el álgebra indicial, se tiene:

$$(\underline{T} - \lambda \underline{I}) \cdot \underline{n} = (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) (\underline{e}_i \underline{e}_j) \cdot n_k \underline{e}_k = 0$$

contrayendo luego los versores \underline{e}_j y \underline{e}_k , queda:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j \underline{e}_i = 0$$

Esto significa una suma en j para cada valor de i , lo cual derivará en el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas: las componentes escalares del autovector \underline{n} , es decir n_1, n_2 y n_3 .

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 &= 0 \\ T_{21} n_1 + (T_{22} - \lambda) n_2 + T_{23} n_3 &= 0 \\ T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + (T_{33} - \lambda) n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

La solución no trivial del sistema se obtendrá si el determinante de los coeficientes es nulo:

$$\begin{vmatrix} (T_{11} - \lambda) & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & (T_{22} - \lambda) & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & (T_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

Dados T_{ij} , la ecuación (2.23) deviene en una ecuación cúbica en λ cuyas raíces serán tres valores $(\lambda_1, \lambda_2 \text{ y } \lambda_3)$, que se denominan autovalores del tensor \underline{T} .

2.6.1 Invariantes de un tensor de segundo orden

La ecuación cúbica a la que desemboca la ecuación (2.23) es la siguiente:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0 \tag{2.24}$$

Donde los coeficientes de la ecuación se denominan invariantes del tensor \underline{T} .

Los invariantes son los que aseguran que las leyes descriptas matemáticamente no dependan en su utilización, del sistema de referencia elegido. Es decir, sean invariantes respecto al sistema coordenado referencial. Así como los vectores poseen un invariante, los tensores de segundo orden poseen tres y sus expresiones son las siguientes:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} \tag{2.25}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \tag{2.27}$$

El primer invariante se denomina "traza del tensor" y es lineal, el segundo invariante se denomina "invariante cuadrático" por su naturaleza de segundo grado, y el tercer invariante es el "determinante del tensor", de naturaleza cúbica. Son invariantes porque ante un cambio en el sistema coordenado, por ejemplo una rotación, sus valores no cambian. Es decir, cambian los elementos T_{ij} pero nunca los resultados de las operaciones que establecen las expresiones 2.25, 2.26 y 2.27. Matemáticamente hablando, podemos decir que al ser los autovalores independientes de la base donde está definido el tensor $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, la ecuación (2.24) se cumple para cualquier terna, con lo cual los coeficientes I_1, I_2 e I_3 resultan invariantes.

Si imaginamos nuevamente una rotación sobre los ejes, de la terna $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, los elementos T_{ij} cambiarán y para una particular posición de la terna, el tensor lucirá diagonal en términos de sus autovalores y con sus elementos no diagonales nulos. La base en la que ello ocurre es la formada por las direcciones de los autovectores. Así:

$$\underline{T} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \tag{2.28}$$

Entre los autovalores se encuentran el máximo y el mínimo valor de los elementos diagonales. Los invariantes, en este caso se obtienen fácilmente de las siguientes expresiones:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (2.29)$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 \quad (2.30)$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.31)$$

Cuando tratemos el tensor de tensiones en un punto, los autovalores identificarán la máxima y la mínima tensión normal (de tracción o compresión) actuantes en un punto de un continuo sujeto a cargas. Dichas tensiones y las direcciones en las que actúan (las de los autovectores) se denominarán "principales" y la misma denominación recibirán los planos perpendiculares a dichas direcciones que contienen al punto considerado.

2.6.2 Perpendicularidad de los autovectores de un tensor simétrico

Teorema: Los autovalores de un tensor simétrico de componentes reales son todos reales y los autovectores son mutuamente perpendiculares y se denominan direcciones principales.

Si λ_1 y λ_2 son autovalores del tensor $\underline{\underline{T}}$ distintos de cero, se cumple:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}_1 = \lambda_1 \cdot \underline{n}_1 \quad (2.32)$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}_2 = \lambda_2 \cdot \underline{n}_2 \quad (2.33)$$

Postmultiplicando escalarmente la ecuación (2.32) por el autovalor \underline{n}_2 y considerando que el tensor es simétrico, se tiene:

$$\lambda_1 \cdot \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = \left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}_1 \right) \cdot \underline{n}_2 = \left(\underline{n}_1 \cdot \underline{\underline{T}} \right) \cdot \underline{n}_2 = \underline{n}_1 \cdot \lambda_2 \cdot \underline{n}_2$$

Porque el tensor es simétrico

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2 = 0 \quad (2.34)$$

$$\underline{n}_1 \perp \underline{n}_2 \quad (2.35)$$

La relación (2.35) es la única posibilidad de garantizar la igualdad a cero que impone la ecuación (2.34). Análogamente se puede demostrar que todos los autovectores son perpendiculares entre sí.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) Explique la necesidad de representar magnitudes físicas con un ordenamiento de 9 números.
- 2) Defina el ente matemático llamado "tensor", los distintos órdenes y la forma de expresarlo matricialmente.
- 3) Demuestre que un tensor de 2° orden con componentes reales, puede expresarse como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico. Pruébalo con un ejemplo.
- 4) Defina el producto diádico entre dos vectores, su notación y su resolución.
- 5) Exponga la idea de la notación indicial y exprese en forma algebraica un tensor de 2° orden utilizando la convención de suma.
- 6) Exprese todas las diadas unitarias de 2° orden y esquematice matricialmente dos diadas con índices distintos e intercambiados (por ejemplo, la (1, 2) y la (2, 1). ¿Qué relación muestran una de otra?
- 7) Enumere las reglas del álgebra indicial para la resolución de los productos escalares entre vectores, entre vectores y tensores de 2° orden y entre tensores de 2° orden.
- 8) Demuestre que el producto escalar entre un vector y un tensor de 2° orden es conmutativo sólo si el tensor es simétrico.
- 9) ¿Por qué un producto doblemente escalar entre dos tensores de 2° orden resulta en un escalar? Explique y demuestre con un ejemplo.
- 10) Defina los autovalores y los autovectores de un tensor de 2° orden.
- 11) Exprese los invariantes de un tensor de 2° orden, en general y en términos de los autovalores.

Página intencionalmente en blanco.

CAPITULO

3

Cinemática de Fluidos

3.1 Introducción

Del mismo modo en que comenzamos el estudio de la Mecánica introductoria a través de las asignaturas llamadas Física I o simplemente Física Mecánica, aquí también comenzaremos estudiando la Cinemática de los Fluidos con el objetivo principal de obtener la aceleración de las partículas, para luego establecer la segunda ley de Newton en una forma apropiada a este medio continuo y deformable. Para cumplir con dicho objetivo haremos primero algunas definiciones y análisis que nos llevarán a lo que llamaremos la derivada material de la velocidad. Por último, obtendremos las líneas que identifican el movimiento de las partículas de un fluido.

3.2 Función de campo

Cuando una función está definida en general en cada punto del espacio y para cada tiempo, se dice que la misma es una "función de campo". Esta denominación está tomada de la imagen de un sembradío donde parece haber una planta en cada punto del terreno.

Este punto de vista de una determinada función se debe a Euler y es muy útil para manipular matemáticamente las distintas variables y propiedades de un

fluido que llena un determinado espacio –o dominio-. Así, podemos hablar de la velocidad de un flujo como una función de campo $\underline{v}(x,y,z,t)$. Una función que para cada tiempo y posición nos dirá cual es la velocidad de la partícula que está allí en ese momento. Es decir, cada partícula del fluido recorrerá distintas posiciones del dominio de flujo tomando velocidades establecidas por la función de campo para cada posición y para cada tiempo. En un campo no estacionario, dos partículas que en diferentes tiempos pasan por la misma posición, tienen velocidades distintas. La figura 3.1 muestra un canal convergente donde se indica la función de campo “velocidad del flujo”, también podrían definirse otras funciones de campo derivadas de ella: el flujo de cantidad de movimiento, la aceleración y la velocidad de deformación del fluido, entre otras.

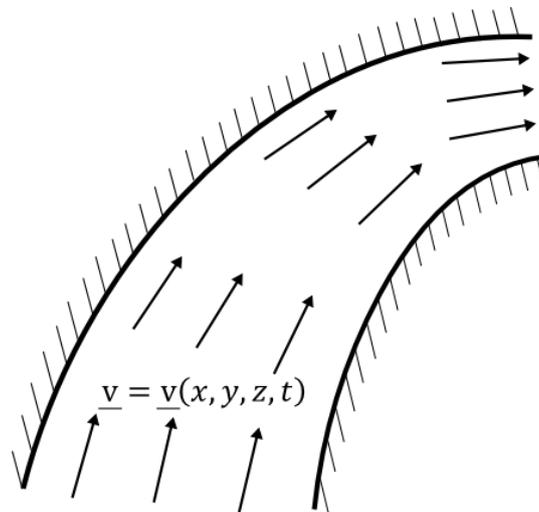


Figura 3.1: Esquema de una función de campo. La velocidad de un flujo es una función de campo.

Así como la función de campo velocidad es vectorial, hay funciones de campo escalares y tensoriales en general. Una función de campo escalar podría ser la temperatura del fluido y una función de campo tensorial de segundo orden podría ser la tensión en cada punto de un fluido o medio continuo en general.

3.2.1 Descripción material o Lagrangiana

Otra forma de representar el movimiento y las variables asociadas a un flujo es la denominada descripción material o Lagrangiana, donde se sigue cada partícula a través del tiempo. Las posiciones de cada partícula (X_1, X_2, X_3) respecto a una referencia dada y para un tiempo inicial (t_0) se especifican mediante las llamadas coordenadas materiales. La evolución de su movimiento, las variables asociadas e interacciones serán sólo función del tiempo para cada partícula. Luego, la posición de cada partícula en el tiempo será:

$$x_1 = (X_1, X_2, X_3, t); x_2 = (X_1, X_2, X_3, t); x_3 = (X_1, X_2, X_3, t) \quad (3.1)$$

$$x_1 = X_1; x_2 = X_2; x_3 = X_3 \text{ para } t = t_0$$

La expresión (3.1) es entonces la expresión de la trayectoria de la partícula que en el tiempo t_0 ocupaba la posición material (X_1, X_2, X_3) .

Como hemos dicho anteriormente, nosotros trabajaremos con la descripción Euleriana, utilizando el concepto de función de campo.

3.3 Variaciones respecto al tiempo relacionadas con funciones de campo. Derivada Material

Las leyes de la Física poseen una estructura similar en la mayoría de los casos: "la variación total de una magnitud con respecto al tiempo es igual a la sumatoria de las causas de dicha variación".

Si la magnitud que varía con el tiempo es una función de campo, debemos encontrar la expresión matemática correcta para expresarla, porque aún en campos estacionarios pueden registrarse variaciones respecto al tiempo de una magnitud dada.

3.3.1 Variaciones respecto al tiempo en campos escalares

Para ejemplificar y desembocar en la expresión que nos dará la variación buscada, imaginemos un campo escalar estacionario unidimensional como puede ser la temperatura ¹ de un ambiente en términos de la profundidad del mismo. Por ejemplo un horno donde la temperatura es cada vez mayor a medida que nos dirigimos hacia su interior. La función de campo temperatura será $T(x)$, como se indica en la figura 3.2.

Si la pregunta fuera: ¿cuál es la variación de T respecto al tiempo? La más automática de las respuestas sería que dicha variación es nula porque T no depende del tiempo. Sin embargo, si imaginamos la bastante incómoda situación de movernos hacia adentro del horno con una velocidad w_i en el sentido del versor i , nos encontraremos con temperaturas cada vez más altas a medida que nuestro reloj cuenta el tiempo. Es decir que podríamos definir un cambio de temperatura respecto al tiempo, percibido durante nuestro movimiento. Esta es una variación de T de forma indirecta debido a que las coordenadas cambiaron con el tiempo por nuestro movimiento como observadores. Es decir:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dx} dx \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dT}{dx} w_x \quad (3.2)$$

La expresión (3.2) establece una variación del campo estacionario de temperatura directamente asociado a su gradiente y a la componente x de la velocidad del observador. Para los tres observadores de la figura 3.2, las variaciones de temperatura respecto al tiempo serán las siguientes:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_1 = \frac{dT}{dx} w_1 ; \quad \left. \frac{dT}{dt} \right|_2 = \frac{dT}{dx} w_2 \cos \theta ; \quad \left. \frac{dT}{dt} \right|_3 = 0$$

¹ La temperatura no será una variable de interés en este curso, pero se la ha elegido para el análisis de modo de darle al mismo mayor comprensión por la valoración sensitiva que tiene la temperatura y sus cambios.

CAPITULO 3: CINEMATICA DE FLUIDOS

En general, si $T=T(x,y,z)$ y el observador se mueve con una velocidad con componentes en las tres direcciones, es directa la generalización de la expresión (3.2) como:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

y, dividiendo miembro a miembro por dT , se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} \tag{3.3}$$

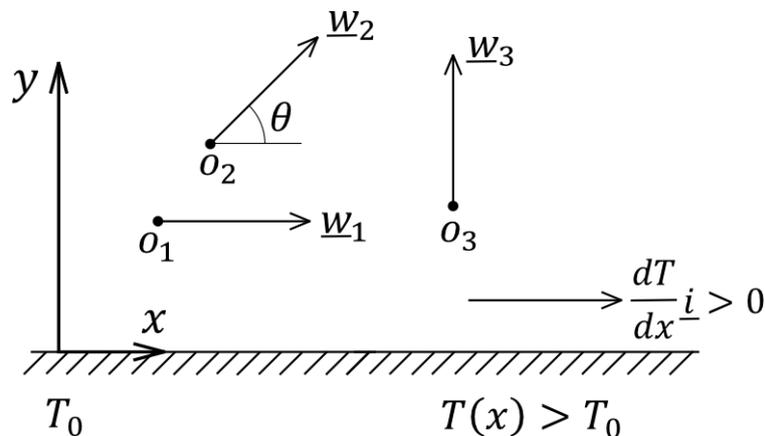


Figura 3.2: Campo estacionario de temperatura. En una función de campo estacionaria con gradiente, se pueden registrar cambios respecto al tiempo si nos movemos en el campo en que la función está definida.

La expresión (3.3) tiene la forma de un producto escalar, esto es, la suma de los productos entre componentes homólogas. Las componentes homólogas de los vectores gradiente de T y velocidad del observador (w). Por ello, en notación tensorial, se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = \underline{w} \cdot \underline{\nabla} T \tag{3.4}$$

La ecuación (3.4) dice que si nos movemos en un campo donde una determinada magnitud estacionaria tiene gradiente, podemos medir variaciones de dicha magnitud respecto al tiempo, salvo que nos movamos perpendicularmente al gradiente. Si sumamos ahora la variación explícita de T con el tiempo, la expresión (3.4) se generaliza como:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{w} \cdot \underline{\nabla} T \tag{3.5}$$

Donde el primer sumando del segundo miembro representa la variación de T a coordenadas constantes, o "local", y el segundo término representa la variación de T a tiempo constante o "convectiva" (debida al movimiento).

3.3 VARIACIONES RESPECTO AL TIEMPO DE FUNCIONES DE CAMPO

Si los observadores son las partículas de un fluido que se mueve en el campo genérico de temperaturas, la velocidad \underline{v} será la velocidad del flujo, es decir \underline{v} . Esta sería la variación total respecto al tiempo que registra o "siente" una partícula de fluido o, lo que es lo mismo, un observador montado sobre ella. Esta variación total se denomina derivada material y se simboliza con la letra D :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} T \quad (3.6)$$

Para graficar el significado de cada término de la expresión (3.5) y su especialización en la (3.6), imaginemos un río que corre, un pescador en una canoa y peces que se desplazan en el agua. Si el pescador midiese la variación de la cantidad de peces que pasan debajo de su proa durante algún tiempo, mediría diferentes cantidades según su movimiento: si estuviese anclado mediría la derivada parcial respecto al tiempo, es decir a coordenadas constantes o "local"; si se estuviese moviendo impulsado con su motor, estaría registrando en cada posición, además de la derivada local, la derivada "convectiva" por su movimiento; esta medida sería la de la "derivada total". Por último, si el pescador se dejase llevar por la corriente, como montado sobre una partícula de fluido, registraría las variaciones temporales que experimenta dicha partícula, es decir, la "derivada material".

3.3.2 Variaciones respecto al tiempo en campos vectoriales

Si nuestro caso ahora es el de una magnitud de campo vectorial, llegar a la expresión para la variación total respecto al tiempo podría obtenerse por la aplicación de la expresión (3.6) a cada componente escalar. Para ser concreto y económico en el próximo tratamiento, supongamos que nuestra magnitud de campo vectorial es la que más nos va a interesar en adelante: la velocidad de un flujo, tal que $\underline{v} = \underline{v}(x, y, z, t)$ siendo sus componentes -asimismo- funciones de x , y , z y t . Apliquemos entonces la expresión 3.6 a cada componente de \underline{v} :

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \quad (3.7)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \quad (3.8)$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \quad (3.9)$$

Si multiplicamos la expresión (3.7) por el versor \underline{i} , la (3.8) por el versor \underline{j} y la (3.9) por el versor \underline{k} y luego las sumamos, obtendremos la derivada material del vector velocidad, es decir:

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \quad (3.10)$$

La (3.10) es la expresión que debe usarse para calcular la aceleración que una partícula experimenta en un campo de flujo. El primer término del segundo miembro es la denominada "aceleración local" que surge de la dependencia explícita del campo de velocidades con el tiempo, y el segundo término es la aceleración convectiva que tiene que ver con la dependencia de la velocidad con las coordenadas y se expresa como la contracción del vector \underline{v} y su gradiente (ver puntos 2.2.1 y 2.4). Como hemos visto, éste último expresa las aceleraciones de las partículas aún en campos estacionarios, por ejemplo en un estrechamiento como el de la figura 3.3.

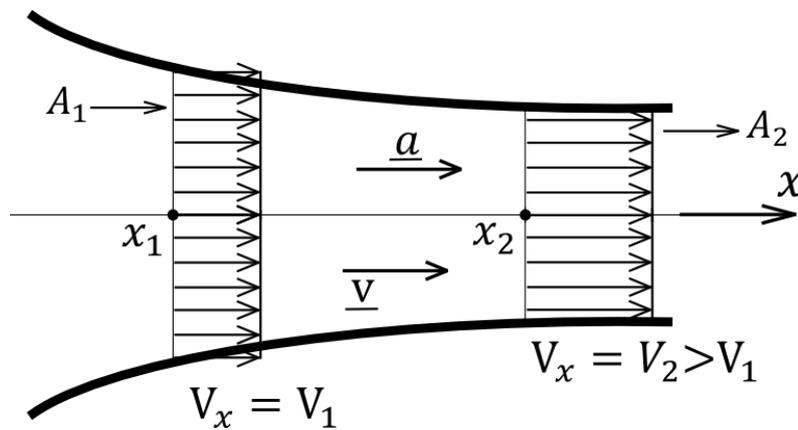


Figura 3.3: Aceleración en un campo estacionario.

La figura 3.3 muestra un canal convergente donde un flujo estacionario e incompresible pasa con una velocidad que supondremos sólo dependiente de la coordenada x , es decir $\underline{v} = v_x(x) \underline{i}$. En un canal como éste, una partícula que se encuentra en x_1 experimentará una aceleración cuando llegue a x_2 donde su velocidad habrá aumentado para que la misma cantidad de fluido pueda pasar por un área de flujo más estrecha (ver ítem 6.5). El flujo supuesto se llamará en adelante flujo plano y nos servirá para modelar flujos de fluidos de muy baja viscosidad. Debe aclararse que por la condición de no deslizamiento, el fluido en contacto con las paredes del canal deberán tener velocidad nula, no obstante y como primera aproximación lo obviaremos.

Si las otras componentes de la velocidad son nulas, sus derivadas parciales respecto al tiempo también, asimismo las derivadas parciales de v_x respecto a y y z también son nulas, el único término que subsiste de las expresiones (3.7), (3.8) y (3.9) es

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x = \frac{dv_x}{dx} v_x > 0 \Rightarrow \underline{a} = a_x \underline{i} \quad (3.11)$$

Si el flujo fuera no estacionario, debería sumarse en la ecuación (3.11) la derivada parcial de v_x respecto al tiempo.

3.4 Velocidad de deformación en un flujo tridimensional

En el capítulo 1 hemos obtenido la velocidad de deformación angular para un flujo unidimensional suponiendo una experiencia (ver figura 1-2b) donde un fluido se sometía a esfuerzos de corte o tangenciales. A partir de allí fue propuesta la ley de viscosidad de Newton, que modela un hecho experimental que se repite para un gran número de fluidos de importancia ingenieril. La extensión de dicha ley al dominio de un flujo en el espacio, requiere un análisis de la velocidad de deformación angular que nosotros plantearemos en el plano para luego inferir a las tres dimensiones.

La figura 3.4 muestra un elemento de fluido que en el instante inicial posee una forma cuadrada y que luego de un lapso de tiempo pequeño, adquiere una forma de paralelogramo debido a la deformación angular causada por tensiones cortantes. Por comodidad se ha supuesto que en el origen de coordenadas la velocidad es cero. Una velocidad distinta de cero aparecería en las próximas expresiones complicándolas, pero finalmente se cancelaría.

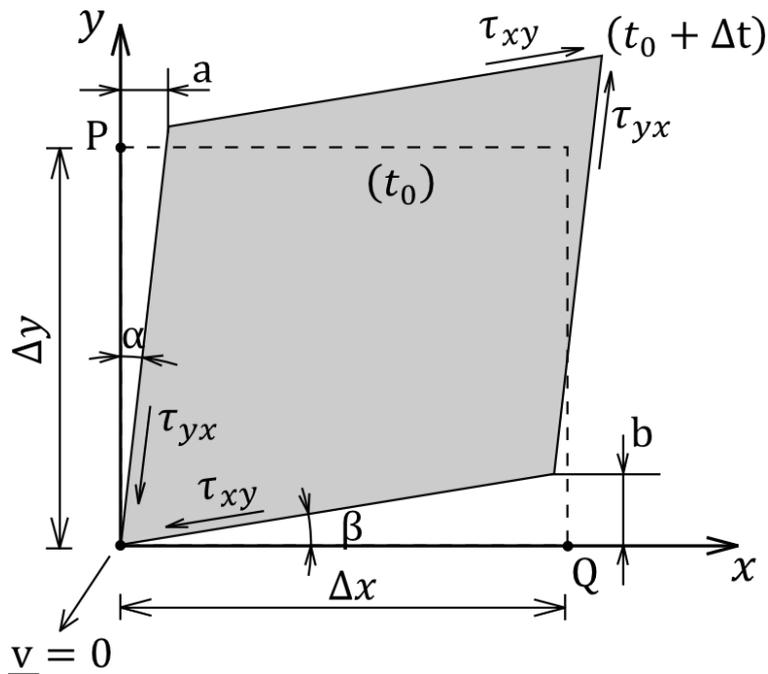


Figura 3.4: Deformación angular de un elemento de fluido entre dos tiempos muy próximos.

Si los ángulos α y β son pequeños, pueden aproximarse a sus tangentes. Luego, la deformación angular total es:

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{a}{\Delta y} + \frac{b}{\Delta x}$$

CAPITULO 3: CINEMATICA DE FLUIDOS

Donde los segmentos a y b , que son los desplazamientos de los puntos del cuadrado situados sobre los ejes coordenados, se obtienen multiplicando las variaciones de las velocidades respecto a las coordenadas, por los incrementos de las coordenadas entre el origen y el punto que se ha desplazado. Es decir, para el caso del punto P que se desplaza el segmento a en la dirección x en el lapso de tiempo Δt , la velocidad que al mismo le corresponde es la componente x de la velocidad cuyo valor depende de su variación en y y la modificación que sufre la coordenada desde el origen hasta el punto P , es decir Δy :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \cong \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} [v_x(y + \Delta y) - v_x(y)] ; v_x(y) = 0, v_x(y + \Delta y) = \Delta y \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Del mismo modo, el desplazamiento b en la dirección y que sufre el otro punto extremo considerado (el Q), se debe a la componente y de la velocidad cuyo valor depende de su variación en x y la modificación de esta coordenada desde el origen hasta Q , es decir Δx . Luego:

$$\gamma = \frac{a}{\Delta y} + \frac{b}{\Delta x} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Delta y \Delta t \frac{1}{\Delta y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \Delta x \Delta t \frac{1}{\Delta x}$$

La velocidad de deformación angular la obtendremos haciendo el cociente incremental entre γ y el tiempo, estableciendo su límite cuando el incremento de tiempo tiende a cero. Debe tenerse en cuenta que $\gamma(t_0)=0$ porque el elemento no está deformado angularmente. Entonces:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Delta t + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \Delta t \right] = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yx} \quad (3.12)$$

Del mismo modo puede mostrarse que en los planos (x,z) y (y,z) las velocidades de deformación angular son:

$$\dot{\gamma}_{xz} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \dot{\gamma}_{zx} ; \quad \dot{\gamma}_{yz} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \dot{\gamma}_{zy}$$

Un elemento de fluido también puede deformarse sufriendo elongaciones o acortamientos. Por ejemplo, un elemento en la posición x_1 de la figura 3.3 que inicialmente es cuadrado, debe estirarse en la dirección del flujo y adelgazarse en la dirección transversal para poder pasar por el área estrechada correspondiente a la posición x_2 . La figura 3.5 muestra una elongación como la que se ha mencionado. Por definición la deformación es el cociente entre el alargamiento y la longitud original que, referida al tiempo, nos dará la velocidad de deformación en la dirección x . Luego:

$$\varepsilon = \frac{a}{\Delta x} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \Delta x \Delta t \frac{1}{\Delta x}$$

3.4 VELOCIDAD DE DEFORMACION EN UN FLUJO TRIDIMENSIONAL

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \Delta t \right] = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \dot{\varepsilon}_{xx} \quad (3.13)$$

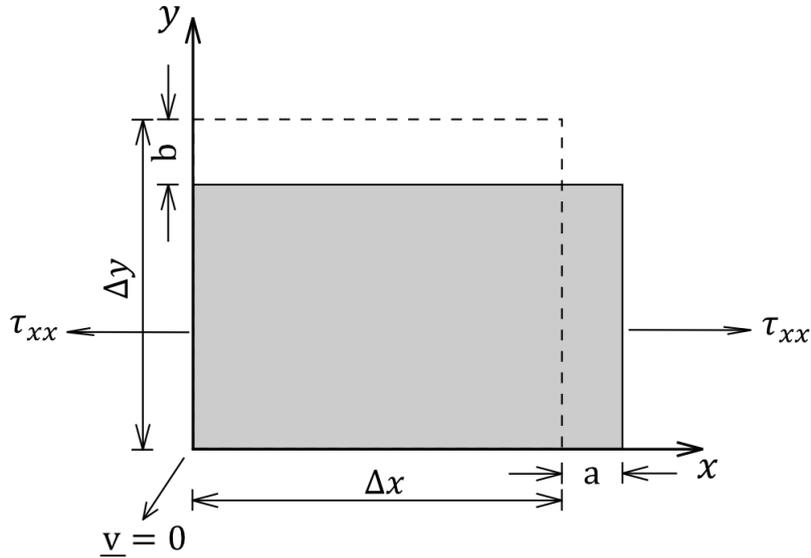


Figura 3.5: Deformación lineal de un elemento de fluido entre dos tiempos muy próximos.

De la misma forma puede determinarse que

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (3.14)$$

Veremos luego en el capítulo 6, qué condición de compatibilidad deben cumplir las velocidades de deformación lineal en el caso de fluidos incompresibles.

Luego, las velocidades de deformación angular pueden definirse indicialmente como:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad ; \quad j = 1, 2, 3 \quad ; \quad \text{con } i \neq j \quad (3.15)$$

y las velocidades de deformación longitudinal como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad ; \quad i = j = 1, 2, 3 \quad (3.16)$$

De donde se desprende que estas componentes son simétricas, dado que las componentes ij son idénticas a las ji . Cuando i es distinto de j tenemos las componentes no diagonales que miden las deformaciones angulares en los diferentes planos, mientras que los elementos diagonales (cuando $i = j$) miden las deformaciones longitudinales en las direcciones de los ejes coordenados. Veremos en el ítem 3.6 que las velocidades de deformación dadas por las expresiones

(3.15) y (3.16) son parte de un tensor simétrico que será de utilidad para extender a tres dimensiones la ley de viscosidad de Newton.

3.5 Velocidad de rotación en un flujo tridimensional

Si volvemos a la figura 3.4 y asignamos signos positivos a los giros antihorarios y negativos a los giros horarios, el giro que implica el ángulo α será negativo y el que impone el ángulo β será positivo. Luego, la suma algebraica de dichos giros nos dará la rotación neta como cuerpo rígido, es decir exceptuando las deformaciones. Un análisis sobre los mismos instantes del ítem 3.4 y el posterior pasaje al límite, nos dará las siguientes expresiones que llamaremos velocidad de rotación sobre los tres ejes coordenados, vistos desde sus direcciones positivas:

$$\left. \begin{aligned} \omega_z &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \omega_y &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \omega_x &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{v} \quad (3.17)$$

Las rotaciones son las componentes del vector rotación o "rotor de la velocidad" como indica la expresión (3.17). Este vector también suele llamarse vorticidad y es muy importante porque cuando vale cero, estaremos en presencia de un flujo no rotacional o irrotacional. Estos flujos son característicos de fluidos de muy baja viscosidad o, idealmente, viscosidad nula. Porque la rotación de un elemento de fluido sólo es posible por la acción de esfuerzos de corte sobre su superficie dado que sólo estos pueden producir momentos respecto a su centro de gravedad. Las fuerzas másicas pasan por dicho centro y los esfuerzos normales que actúan en caras opuestas, son fuerzas que tienen la misma línea de acción produciendo un momento neto nulo. Más adelante veremos esta cuestión con más detenimiento.

3.6 Tensor velocidad de deformación y tensor velocidad de rotación

Hemos visto que las componentes del tensor velocidad de deformación y del tensor velocidad de rotación, están expresados en términos de los gradientes de velocidad. Por ello, si aplicamos la propiedad de expandir un tensor en la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico (ver ecuación 2.3) al tensor gradiente de velocidad, tendremos:

$$\underline{\nabla} \underline{v} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{v} + (\underline{\nabla} \underline{v})^T) + \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{v} - (\underline{\nabla} \underline{v})^T) \quad (3.18)$$

3.6 TENSOR VELOCIDAD DE DEFORMACION DE UN FLUJO TRIDIMENSIONAL

Donde la parte simétrica se denomina "tensor velocidad de deformación" y la parte antisimétrica se llama "tensor velocidad de rotación" o "tensor vorticidad". Así:

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{v} + (\underline{\nabla} \underline{v})^T) \quad (3.19)$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{v} - (\underline{\nabla} \underline{v})^T) \quad (3.20)$$

Las componentes del tensor vorticidad por encima de la diagonal principal, son las velocidades promedios de rotación según las direcciones positivas de los ejes coordenados, mientras que las componentes antisimétricas corresponden a las velocidades promedios de rotación según las direcciones negativas de los ejes coordenados, naturalmente de distinto signo pero de igual módulo. Esto tiene su razón en que una rotación horaria vista desde una cara de un elemento plano, es antihoraria si la observamos en la cara opuesta.

Finalmente, el desplazamiento entre dos instantes de tiempo de un elemento fluido puede expresarse como: un desplazamiento como cuerpo rígido, más una rotación como cuerpo rígido, más una deformación longitudinal y otra angular.

3.7 Líneas características de un flujo

En el análisis de problemas de Mecánica de Fluidos usualmente es útil tener una representación del flujo a través de líneas características. Estas líneas son básicamente tres: las líneas de corriente que muestran la dirección instantánea del flujo donde cada punto de las mismas están ocupados por distintas partículas; las líneas de trayectoria o camino de una partícula dada y las líneas de traza que se obtienen por todas las partículas que en diferentes tiempos pasaron por una posición dada, el mejor ejemplo de líneas de traza son las plumas de humo que surgen de un cigarrillo encendido. Las líneas de corriente y las de traza tienen un valor más experimental que analítico, aunque las trataremos desde este punto de vista para un caso muy sencillo. En los flujos estacionarios las líneas de corriente, las líneas de trayectoria y las líneas de traza coinciden.

3.7.1 Líneas de corriente

Las líneas de corriente, como se ha dicho, muestran la direccionalidad del flujo instantáneo y se definen como las líneas que pasan tangentes a los vectores velocidad de las partículas, por lo cual es condición natural que no haya flujo a través de estas líneas². La figura 3.6 muestra el entorno de una partícula cuya velocidad es \underline{v} tangente a la línea de corriente a la cual pertenece, en dicho entorno el arco de curva infinitesimal en la dirección del flujo puede represen-

² Los contornos sólidos que confinan un flujo son también líneas de corriente porque no hay flujo lo atraviesen. En rigor y debido a la condición de no deslizamiento, lo serán para las partículas separadas infinitesimalmente del contorno.

CAPITULO 3: CINEMATICA DE FLUIDOS

tarse por el vector $d\mathbf{r}$ que es colineal con la velocidad. La relación entre los módulos de los vectores $d\mathbf{r}$ y \mathbf{v} , se cumple también entre sus componentes, por ello:

$$\frac{dr}{v} = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{3.21}$$

La ecuación (3.21) constituye la base para la determinación de las funciones instantáneas de las líneas de corriente.

La figura 1.11 muestra un campo de velocidades donde puede notarse fácilmente las líneas que surgirían de unir los extremos iniciales de los vectores en dirección tangente a los mismos. Estas líneas serían líneas de corriente.

Por ejemplo, supongamos el siguiente campo de velocidad en el plano (x,y) $\mathbf{v} = [x/(1+t)] \mathbf{i} + [y/(1+2t)] \mathbf{j}$, podemos obtener la función $y=f(x)$ de la línea de corriente que pase por el punto (x_0,y_0) para el instante inicial $t=0$. Tomando la igualdad (3.21) según corresponda y utilizando una variable auxiliar "s" para escribir las ecuaciones como un sistema, se tiene:

$$\frac{dx}{ds} = v_x = \frac{x}{(1+t)}, \quad \frac{dy}{ds} = v_y = \frac{y}{(1+2t)}$$

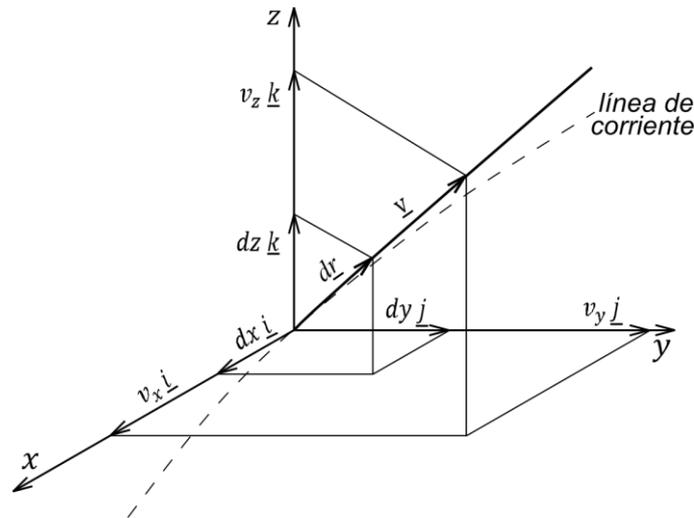


Figura 3.6: Línea de corriente y vector velocidad de flujo para una partícula dada. El vector velocidad y el vector longitud de arco son proporcionales.

Separando las variables e integrando con t constante,

$$x = C_1 \exp \frac{s}{(1+t)}, \quad y = C_2 \exp \frac{s}{(1+2t)}$$

Luego, para $x=x_0$ y $y=y_0$ en $s=0$ (donde empieza la línea de corriente, el arco de curva es nulo), manteniendo t sin especificar, resulta $C_1=x_0$ y $C_2=y_0$. Por último, eliminando el parámetro s resulta la función línea de corriente:

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^n, \quad n = \frac{1+t}{1+2t}$$

Dicha ecuación expresa la línea de corriente que pasa por el punto (x_0, y_0) para todo tiempo. La figura 3.7 muestra estas líneas para tiempos anteriores y posteriores al tiempo inicial. Cuando el tiempo tiende a infinito, la línea de corriente toma la forma de una parábola acostada y para $t=0$, ésta es una recta a 45°.

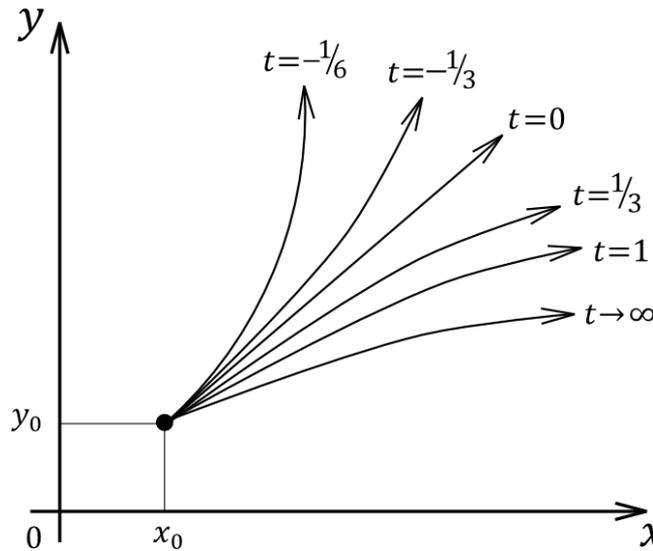


Figura 3.7: Líneas de corriente para diferentes tiempos que pasan por el punto (x_0, y_0) .

3.7.2 Líneas de trayectoria o camino de partícula

Como lo expresa el título de este subítem, el camino de una misma partícula a lo largo del flujo es también una línea característica. Como trayectoria, las ecuaciones para su determinación son las clásicas ecuaciones de la cinemática:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.22}$$

Para el campo de velocidad del ejemplo del ítem anterior, si quisiésemos conocer el camino de partícula de aquella que se encuentra en (x_0, y_0) para $t=0$, lo podemos obtener aplicando las ecuaciones (3.22);

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{x}{(1+t)}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{y}{(1+2t)}$$

$$x = C_1 (1+t), \quad y = C_2 (1+2t)^{1/2} \tag{3.23}$$

Para la condición inicial dada, las constantes C_1 y C_2 resultan x_0 y y_0 respectivamente, luego, eliminando t , se tiene:

$$y = y_0 \left(\frac{2x}{x_0} - 1 \right)^{1/2}$$

En la figura 3.8 se encuentra graficada esta línea.

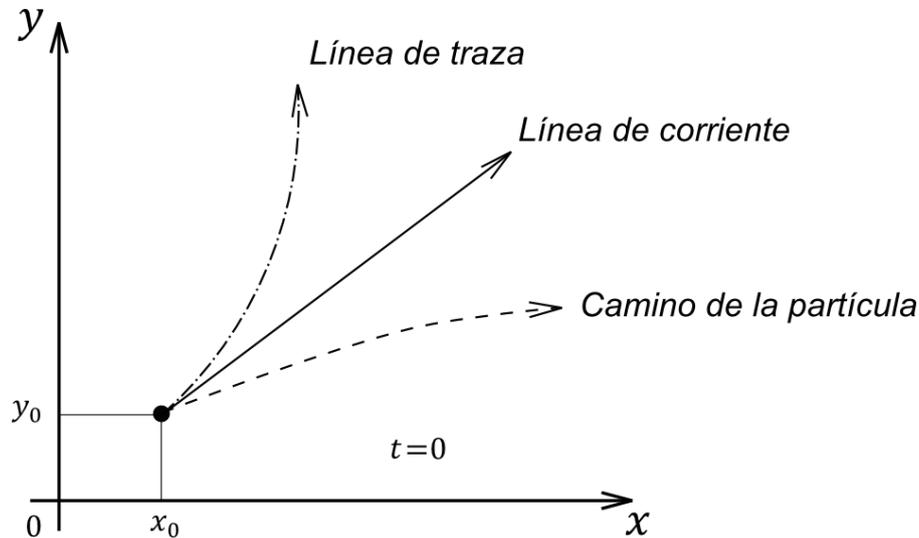


Figura 3.8: Línea de corriente, línea de traza y camino de partícula para el ejemplo tratado.

3.7.3 Líneas de traza

Como se ha dicho, estas líneas corresponden a la sucesión de partículas que en algún instante anterior han pasado por una posición prescrita. Para el caso de flujo plano que venimos analizando, la línea de traza de todas las partículas que en algún instante han pasado por (x_0, y_0) , poseen líneas de trayectoria que responden a la ecuación (3.23). Es decir que, para toda partícula que se encuentra sobre una línea de traza en el tiempo $t > 0$, en algún instante previo debió pasar por el punto de referencia, en este caso (x_0, y_0) . De acuerdo a ello, podemos escribir la ecuación (3.23) como:

$$x_0 = C_1 (1 + \xi), \quad y_0 = C_2 (1 + 2\xi)^{1/2}, \quad \xi < t$$

Luego, las constantes de integración correspondiente a cada partícula que ha pasado por (x_0, y_0) en un dado tiempo anterior a t , representado por ζ , serán:

$$C_1 = \frac{x_0}{(1 + \xi)}, \quad C_2 = \frac{y_0}{(1 + 2\xi)^{1/2}}, \quad \xi < t$$

Introducidas en la (3.23) tendremos:

$$x = \frac{x_0 (1 + t)}{(1 + \xi)}, \quad y = \frac{y_0 (1 + 2t)^{1/2}}{(1 + 2\xi)^{1/2}}, \quad \xi < t \tag{3.24}$$

La ecuación (3.24) es la forma paramétrica de la línea de traza, donde el parámetro es ζ . En este sencillo ejemplo es posible eliminar el parámetro de modo de expresar la (3.24) como una función del tipo $y = f(x)$ para cada tiempo. Esto es:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = \frac{(1 + 2t)}{1 + 2[(1+t)(x_0/x) - 1]} \quad (3.25)$$

El caso particular de la expresión (3.25) cuando $t=0$, se encuentra graficado en la figura 3.8. Físicamente, las líneas de traza reflejan el comportamiento de las líneas de corriente antes del tiempo especificado, en este ejemplo antes de $t=0$, mientras que el camino de partícula refleja dicho comportamiento para tiempos mayores al analizado.

Ejemplos sencillos

Como un ejemplo podemos decir que una bandera flameando (figura 3.9) está indicando la dirección instantánea del flujo que interacciona con ella. Como superficie sólida podemos imaginarla como una sucesión de líneas de corriente (ver nota 2 al pie de la página 47).



Figura 3.9: Bandera argentina flameando por la interacción de un flujo libre de aire. Las líneas de unión de los paños celestes y el blanco son claramente líneas de corriente.

La figura 3.10 por su parte, muestra el humo que emana una vela para iluminación en los instantes posteriores a ser apagada. Las llamadas "plumas" de humo configuran líneas de traza ya que en cada punto se encuentra una partícula de humo distinta, pero todas ellas surgidas de un mismo punto en tiempos distintos, anteriores al de la fotografía. En la figura 3.10-a puede verse un flujo de humo bastante errático, no así el que se muestra la figura 3.10-b. Ello se debe a que la fuerza impulsora del flujo es la fuerza ascensional por la

CAPITULO 3: CINEMATICA DE FLUIDOS

diferencia de densidades ³. En el caso a), la vela recién ha sido apagada, el humo está caliente y la fuerza ascensional es relativamente alta produciendo, al principio, un flujo característicamente "laminar" o de bajo número de Reynolds ⁴. La persistencia de la fuerza ascensional acelera el flujo de modo que cambia el régimen de laminar a "turbulento" o de alto número de Reynolds. En el caso b), el fenómeno es el mismo, pero con un humo que ya se ha enfriado, su densidad ha aumentado y la fuerza ascensional se ha reducido, por eso la longitud del tramo laminar es mayor y la zona turbulenta más chica, ambas comparadas con el caso a).

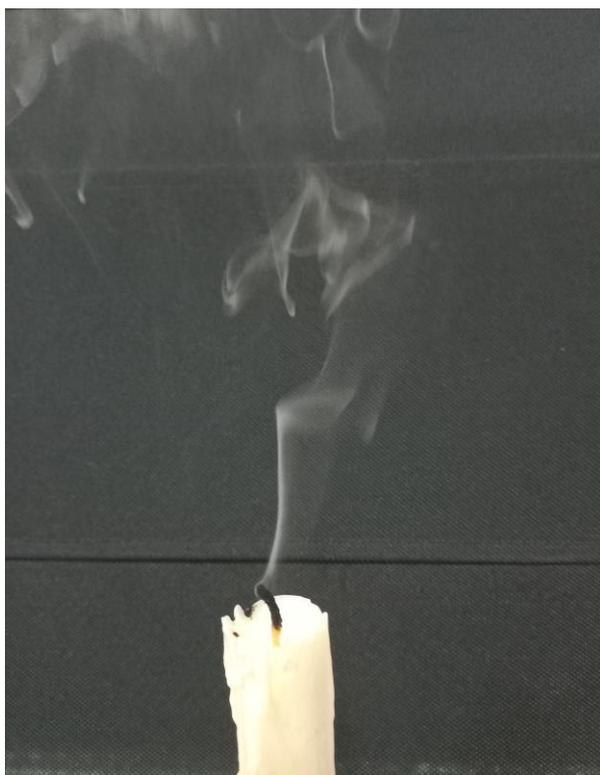


Figura 3.10-a: Plumas de humo (líneas de traza) emanadas de una vela recién apagada (caliente).

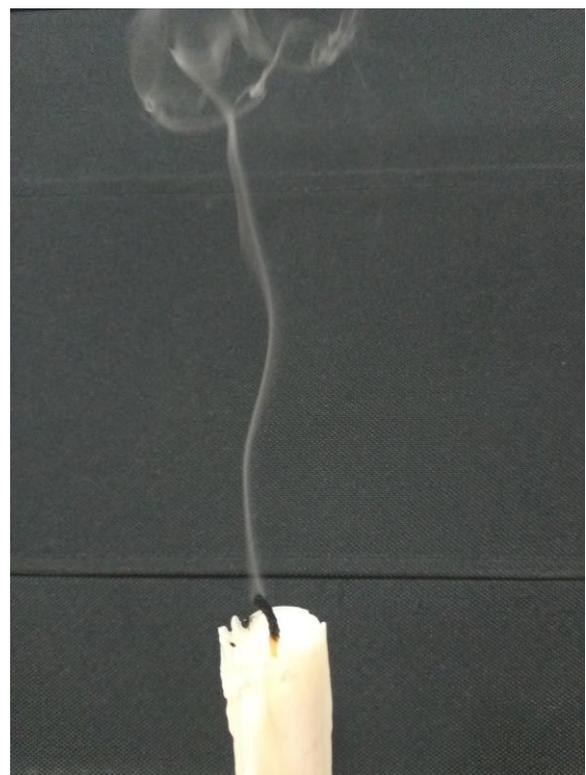


Figura 3.10-b: Plumas de humo (líneas de traza) emanadas de una vela apagada enfriándose.

³ En el capítulo 5 se verá el fenómeno de flotación de un cuerpo sumergido en un fluido como fenómeno describable en términos de la diferencia de densidades entre el cuerpo y el fluido.

⁴ El número de Reynolds es el valor de una relación adimensional entre parámetros físicos y la velocidad de un flujo ($\rho v D/\mu$) que, para flujos laminares es pequeño (dominan las fuerzas viscosas) y para flujos turbulentos es alto (domina la inercia). Ver capítulos 7-12.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) Demuestre que de una función de campo escalar se puede obtener una variación respecto al tiempo.
- 2) Defina "derivada total respecto al tiempo" y "derivada material respecto al tiempo". ¿Son cosas distintas o una es la particularización de la otra?
- 3) ¿Qué significado físico tiene una variación local respecto al tiempo de una magnitud física? Ejemplifique.
- 4) ¿Qué significado físico tiene una variación convectiva respecto al tiempo de una magnitud física? Ejemplifique.
- 5) Proponga un ejemplo de flujo estacionario donde exista aceleración y exprésela simbólicamente.
- 6) Exprese las velocidades de deformación angular para un flujo en el espacio.
- 7) Exprese las velocidades de deformación lineal para un flujo en el espacio.
- 8) ¿Qué magnitudes de un flujo se encuentran expresadas en la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad?
- 9) ¿Qué magnitudes de un flujo se encuentran expresadas en la parte antisimétrica del tensor gradiente de velocidad?
- 10) Defina y exprese matemáticamente las líneas de corriente, de traza y de trayectoria. Diferencie una de otras aportando ejemplos.
- 11) ¿Qué características tienen las líneas de corriente, de traza y de trayectoria en un flujo estacionario?
- 12) En flujos no estacionarios, ¿qué líneas de flujo no pueden verse a través de imágenes instantáneas?

Página intencionalmente en blanco.

CAPITULO

4

Tensiones en Medios Continuos

4.1 Introducción

En este cuarto capítulo daremos inicio a la dinámica de fluidos para lo cual estudiaremos de manera particular las fuerzas por contacto –o de superficie- que actúan en las áreas que rodean un volumen de un medio continuo. Estas fuerzas las expresaremos en términos de su intensidad por unidad de área a través de un vector, para tener en cuenta la direccionalidad de dicha magnitud. Este es el primer tema de la dinámica de fluidos, que nos permitirá luego expresar las leyes de la Mecánica para medios continuos aplicables a volúmenes macroscópicos –en su formulación integral- o punto a punto en su formulación diferencial.

4.2 Principio del momento lineal para un medio continuo deformable

El principio del momento lineal o segunda ley de Newton para una partícula o cuerpo ¹ rígido en traslación, la expresábamos en nuestros estudios de Mecánica Introductoria como:

¹ Se define como "cuerpo" a una porción de materia perfectamente delimitada por superficies a través de las cuales no hay intercambio de masa. Es decir: un cuerpo posee masa constante.

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = m\underline{a} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \text{ externas} \quad (4.1)$$

Es decir: la variación respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal de un cuerpo en traslación, es igual a la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él. Siendo constante la masa del cuerpo, la expresión (4.1) toma la forma más conocida de la segunda ley de Newton en los estudios de Mecánica Introdutoria, esto es, "masa de un cuerpo por su aceleración, es igual a la fuerza neta externa obrante sobre él". Los casos en que el cuerpo sea deformable o cambie su masa porque hay un flujo de ésta desde el medio ambiente hacia el cuerpo, o desde éste hacia el medio ambiente, serán motivo de estudio en este libro.

Comencemos expresando la ecuación (4.1) para un cuerpo como el de la figura 4.1 cuya forma y tamaño es variable con el tiempo. Las fuerzas que actúan sobre él podemos discriminarlas en dos tipos: fuerzas de volumen y fuerzas de superficie; es decir, fuerzas que actúan sobre cada partícula parte del volumen total del cuerpo, incluso a distancia sin necesidad de contacto del cuerpo con otro, y fuerzas que actúan a través de las áreas que lo rodean -todas o parte de ellas- y siempre por contacto del cuerpo con otro u otros cuerpos. Por ejemplo, si nos erguimos sobre el suelo en una posición de reposo, las fuerzas que actúan sobre nosotros pueden dividirse en: nuestro peso distribuido en cada una de nuestras partes constitutivas, el aire que nos circunda presionándonos sobre toda nuestra área circundante con una fuerza neta nula y la fuerza normal que el piso nos hace para equilibrarnos en la dirección vertical, a través de la superficie de las suelas de nuestros calzados.

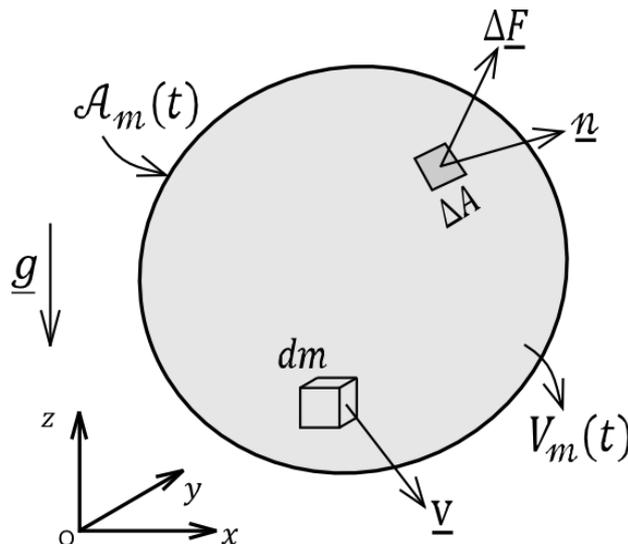


Figura 4.1: Un cuerpo continuo deformable con masa constante.

Ahora bien, si el cuerpo en análisis es el de la figura 4.1 (de masa constante), que al ser deformable posee distintas velocidades, el problema es expresar el

momento lineal total del cuerpo para colocarlo en la expresión 4.1. No existe una velocidad que sea aplicable a la totalidad de la masa, por lo cual –es evidente– que el momento lineal total será la suma del momento lineal de cada partícula: $d\mathbf{p} = \mathbf{v} dm = \mathbf{v} \rho dV$. Luego:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}_{\text{volumen}} + \mathbf{F}_{\text{superficie}} \quad (4.2)$$

Donde $V_m(t)$ representa un volumen de medio continuo con “masa constante” que no intercambia materia a través de su superficie. De ahora en adelante lo llamaremos volumen material y es el que implícitamente utilizábamos en Mecánica introductoria al definir un cuerpo. Es decir que, las leyes de la Mecánica tal cual las conocemos, están expresadas sobre cuerpos de masa constante, ocupando –por lo tanto– un volumen material. El área que rodea a un volumen material la llamaremos “área material” y la simbolizaremos con $A_m(t)$. Genéricamente hablando, toda superficie a través de la cual no haya intercambio de materia será una superficie material.

En Mecánica, las únicas fuerzas de volumen con las que trabajamos son las gravitacionales que, al estar distribuidas, pueden expresarse como una integral tomada sobre el volumen. Asimismo, las fuerzas por contacto o de superficie también la podemos expresar como una integral sobre el área total, del que llamaremos “vector de tensiones”. Esta posibilidad para la fuerza de superficie permite considerar todas las posibles variantes en magnitud y dirección de las fuerzas sobre cada elemento de área, con relación a la orientación que estos tengan (ver figura 4.1). No es lo mismo una fuerza actuando sobre un elemento cuya orientación es paralela a ella, que la misma fuerza actuando sobre un elemento orientado en ángulo respecto a ella. La figura 4.2 muestra este hecho donde se ve que la compresión en el caso ‘a’ se convierte en compresión y corte en el caso ‘b’.

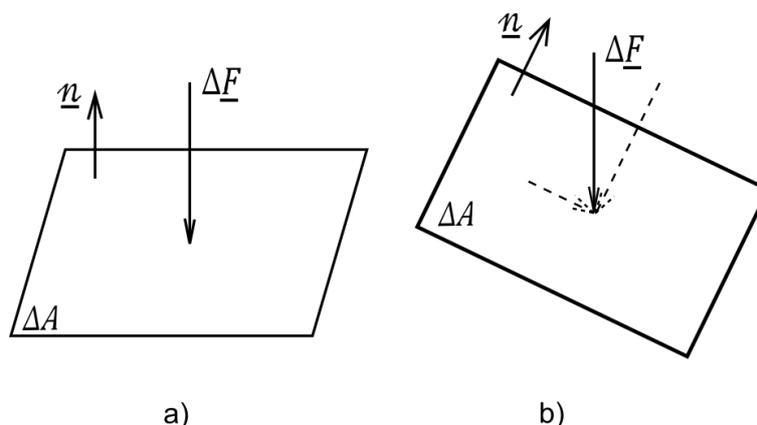


Figura 4.2: a) Fuerza actuante en un plano perpendicular a su dirección: la fuerza sólo tiene componente en la dirección normal al plano (compresión). b) Fuerza actuante en un plano orientado respecto a ella: la fuerza posee componentes en la dirección normal al plano (compresión) y sobre éste (corte).

² Ver nota al pie en la página 6, Capítulo 1.

CAPITULO 4: TENSIONES EN MEDIOS CONTINUOS

La ecuación 4.2 puede entonces expresarse de manera completa en términos integrales o macroscópicos, aclarando que la derivación respecto al tiempo tomada sobre una cantidad evaluada en un volumen material, es una derivada material y la expresaremos con la letra D .

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{V_m(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{A_m(t)} \underline{t}(\underline{n}) dA \quad (4.3)$$

La ecuación (4.3) se denomina Principio del Momento Lineal para un cuerpo continuo deformable, donde la integral de superficie expresa la fuerza total por contacto en función del vector de tensiones cuya definición es la siguiente:

$$\underline{t}(\underline{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (4.4)$$

El vector de tensiones definido como en (4.4) describe el efecto que en un punto tiene la porción de fuerza por contacto aplicada, con referencia a la superficie y a la orientación relativa que el elemento de área tiene respecto a la dirección de la fuerza. Un análisis pormenorizado de este hecho tendrá lugar en la siguiente sección.

La necesidad de trabajar con magnitudes de fuerzas por unidad de área surge del hecho experimental que una misma fuerza no produce igual efecto sobre un medio, si actúa sobre una porción de área más pequeña o una más grande. Por ejemplo, una fuerza de 50×10^3 [N] puede romper por tracción una barra de acero de bajo carbono de 1 [cm²] de sección, pero no hará lo mismo si la barra traccionada posee una sección de 5 [cm²]. Esta última romperá cuando la relación fuerza sobre área en su sección recta alcance el mismo valor de rotura que en la primera (50×10^7 [Pa]); ello implicará una fuerza mucho más grande: cinco veces más grande. Por esto, la resistencia de los materiales sólidos está expresada en fuerza por unidad de área y aún fuerzas pequeñas actuando en áreas muy pequeñas, pueden vencer la resistencia del material. Las herramientas en punta o con filos muy agudos son un ejemplo de aprovechamiento de este fenómeno natural.

4.3 Vector de tensiones

La expresión (4.4) define el llamado vector de tensiones que, como hemos dicho, depende no sólo de la fuerza actuante en un punto sino también de la orientación del plano que lo contiene. Este no es un concepto fácil de comprender, no obstante, haremos el intento de ponerlo en claro imaginando una barra sólida traccionada.

Si quisiésemos conocer el esfuerzo en el punto interior "a" de la barra traccionada de la figura 4.3 tendríamos que descubrirlo –ponerlo a la vista- de modo de poder determinar las fuerzas que a través del medio continuo se transmiten sobre él. Una forma es cortando imaginariamente la barra y, por

ejemplo, considerar el punto a perteneciente a la parte de abajo de la barra. Dicha parte de abajo, por ser parte de un todo en equilibrio, debe estar en equilibrio. Para que ello sea expresado por un diagrama de cuerpo aislado, éste debe contener el efecto que la parte de arriba tiene sobre la de abajo que es la transmisión de la fuerza \underline{F} para equilibrar a la fuerza $-\underline{F}$.

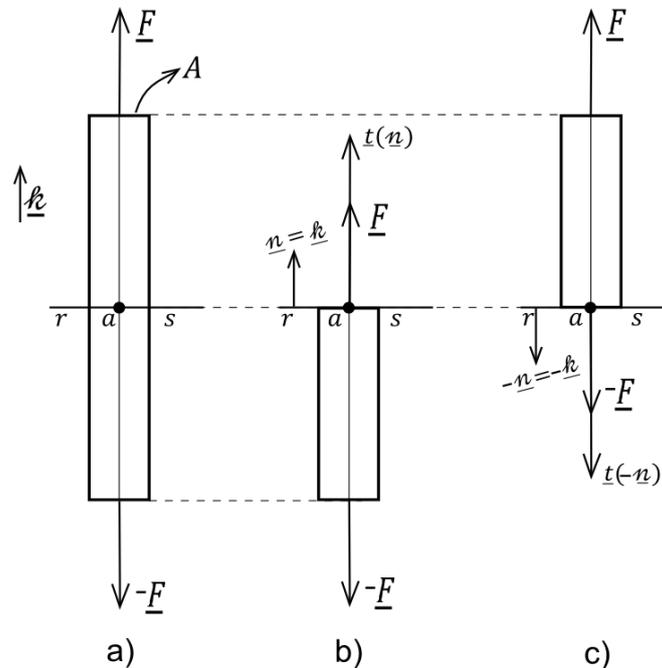


Figura 4.3: Vectores de tensión en un punto de una barra traccionada, vistos desde un plano transversal a la dirección de la fuerza y desde las dos caras del mismo.

Para la dirección y sentido elegidos, cuando vemos desde arriba al punto contenido por el plano $r-s$, la dirección normal de éste coincidirá con el versor \underline{k} . Luego, asumiendo la barra muy esbelta, podemos pensar que la fuerza \underline{F} está distribuida uniformemente en el área transversal A :

$$\underline{t}(\underline{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta A} = \frac{F}{A} \underline{k} = T_1 \underline{k} = \underline{t}(\underline{k}) \quad (4.5)$$

Como puede verse, el vector de tensiones obtenido sólo tiene componentes según la dirección normal ³, a la intensidad de dicha componente –es decir T_1 – más adelante la llamaremos tensión principal, al plano $r-s$ plano principal y a la dirección de \underline{n} , dirección principal. El vector $\underline{t}(\underline{n})$ es uno de los vectores de tensión que pueden evaluarse según los planos coordenados.

Si repetimos el análisis considerando al punto a perteneciente a la parte de arriba de la barra, deberíamos realizar un diagrama de cuerpo aislado como el que muestra la figura 4.3-c. En ese caso la fuerza actuante en el punto a es la $-\underline{F}$

³ Se sugiere ver el video del autor desde el siguiente enlace:

https://drive.google.com/file/d/1Dyemecf0G37BBiJ8-xN3UgSHn_Gn25Di/view?usp=drive_link

CAPITULO 4: TENSIONES EN MEDIOS CONTINUOS

y el plano r - s tendrá una normal $-\underline{n}$. Luego y por las mismas consideraciones anteriores:

$$\underline{t}(-\underline{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta A} = \frac{F}{A} (-\underline{k}) = T_1 (-\underline{k}) \quad (4.6)$$

Comparando las expresiones (4.5) y (4.6) se desprende una relación muy importante que aprovecharemos en adelante:

$$\underline{t}(\underline{n}) = -\underline{t}(-\underline{n}) \quad (4.7)$$

Podríamos analizar también que esfuerzo actúa sobre a cuando lo consideramos parte del plano p - q , un plano inclinado un ángulo θ respecto al plano r - s . La figura 4.4 muestra este corte y el diagrama de cuerpo aislado de la parte inferior de la barra. El vector de tensiones para el plano p - q , considerando distribución uniforme de \underline{F} sobre el área inclinada, será:

$$\begin{aligned} \underline{t}(\underline{n}^*) &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta A} = \frac{F}{A_{p-q}} \underline{k} = \frac{F}{A} \cos \theta \underline{k} = T_1 \cos \theta \underline{k} = (\underline{n}^* \cdot \underline{k}) \underline{t}(\underline{k}) \\ &= \underline{n}^* \cdot [\underline{k} \underline{t}(\underline{k})] \end{aligned} \quad (4.8)$$

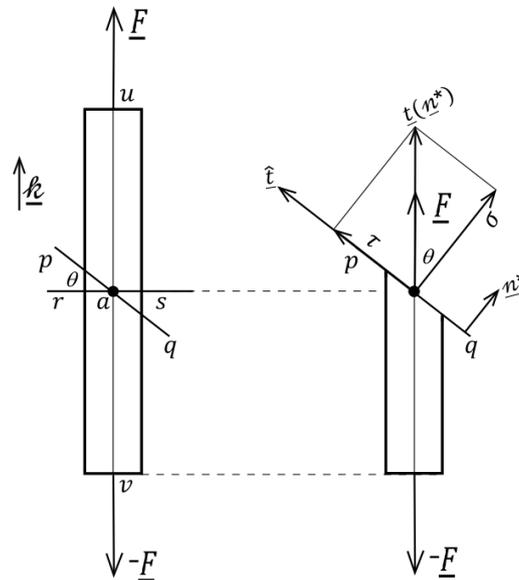


Figura 4.4: Vector de tensión en un punto de una barra traccionada, visto desde un plano orientado respecto a la dirección de la fuerza.

La inspección de la ecuación (4.8) pone de manifiesto que $\underline{t}(\underline{n}^*) \neq \underline{t}(\underline{n})$, además de notarse que el primero posee componentes según la dirección normal al plano p - q y según una dirección yacente en él. Es decir, según el plano p - q , el punto a

no solo siente tracción sino también corte ⁴; las intensidades de estos esfuerzos surgen de proyectar $\underline{t}(\underline{n}^*)$ sobre las direcciones normal y tangencial:

$$\sigma = \underline{t}(\underline{n}^*) \cdot \underline{n}^* = T_1 \cos \theta \cos \theta = T_1 (\cos \theta)^2 \quad (4.9)$$

$$\tau = \underline{t}(\underline{n}^*) \cdot \underline{\hat{t}} = T_1 \cos \theta \sin \theta = \frac{T_1}{2} \sin 2\theta \quad (4.10)$$

Por último, la expresión (4.8) muestra que el vector de tensiones según un plano orientado respecto a un plano coordenado, puede determinarse en función del vector de tensiones que actúa sobre el plano coordenado. En este problema simple de esfuerzo unidimensional, el vector de tensiones para el plano orientado puede obtenerse multiplicando escalarmente el versor normal por la diada formada entre el versor \underline{k} y el vector $\underline{t}(\underline{k})$. Esta relación será generalizada a las tres dimensiones en el ítem 4.4.

Las denominaciones σ y τ se de las tensiones normal y tangencial respectivamente son clásicas en la Mecánica del Sólido y vamos a tomarlas momentáneamente para los desarrollos que siguen. Debemos aclarar que todo lo realizado es válido para cualquier medio continuo, tanto sólido como fluido.

La aparición de tensiones cortantes en planos oblicuos al plano principal r - s produce distorsiones angulares que, en el caso de los fluidos, si no están compensadas, lo pondrán en movimiento. Por ejemplo, un líquido en un recipiente cilíndrico en reposo, carece de esfuerzos tangenciales en las partículas que lo componen porque el recipiente genera reacciones sobre la superficie del líquido anulándolos. Si el recipiente desapareciese de un instante a otro, el líquido se derramaría porque las tensiones predichas por la expresión (4.10), lo pondrían en movimiento ⁵. Obviamente, este caso sería el opuesto al de la barra analizada porque el líquido se encuentra en compresión, una compresión creciente cuanto más cerca del fondo nos encontramos.

En el caso de los sólidos, por ejemplo, los aceros dúctiles, la tracción de una barra como la de la figura 4.3 llegaría a la rotura si la fuerza alcanzase una magnitud lo suficientemente grande. Esta rotura se produce en la forma de copa y cono porque quienes superan la resistencia del material en ese estadio de carga, son las tensiones de corte, de las cuales las más elevadas se producen en planos a 45° del eje de la barra.

4.3.1 Círculo de Mohr

Las tensiones en un punto según diferentes planos de análisis presentan valores distintos que se relacionan a las tensiones principales. En el estudio de la barra traccionada hemos visto como para un plano en ángulo respecto al plano princi-

⁴ Se sugiere ver el video del autor desde el siguiente enlace:

https://drive.google.com/file/d/1qcCN4YwKMM17wGwl6Aloo2WNUUpB84AOd/view?usp=drive_link

⁵ Se sugiere ver el video del autor desde el siguiente enlace:

https://drive.google.com/file/d/1sY_WnGbIiHRs0xMIGu7YMMgRUqljAkc4/view?usp=drive_link

CAPITULO 4: TENSIONES EN MEDIOS CONTINUOS

pal, las tensiones normal y tangencial pueden escribirse en términos de la tensión principal T_1 (ver ecuaciones 4.9 y 4.10). Las ecuaciones (4.9) y (4.10) son las formas paramétricas de σ y τ en función de T_1 y θ que obra como el parámetro. Si eliminamos θ , obtendremos una expresión que vincule sólo σ y τ con T_1 . Por ello, utilizando la identidad trigonométrica $(\cos\theta)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\cos 2\theta)$, se tiene:

$$\sigma = \frac{T_1}{2} + \frac{T_1}{2} (\cos 2\theta) \Rightarrow \left(\sigma - \frac{T_1}{2}\right) = \frac{T_1}{2} (\cos 2\theta) \Rightarrow \left(\sigma - \frac{T_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{2}\right)^2 (\cos 2\theta)^2$$

que sumado miembro a miembro con la 4.10 elevada al cuadrado, deviene en

$$\left(\sigma - \frac{T_1}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{T_1}{2}\right)^2 \tag{4.11}$$

La (4.11) es la ecuación de una circunferencia que vincula los valores de las tensiones normales y tangenciales que aparecen en planos oblicuos respecto al plano principal. La circunferencia tiene un radio $T_1/2$ y está centrada en $T_1/2$ en un sistema de ejes donde la abscisa sea el eje de σ y la ordenada sea el eje de τ .

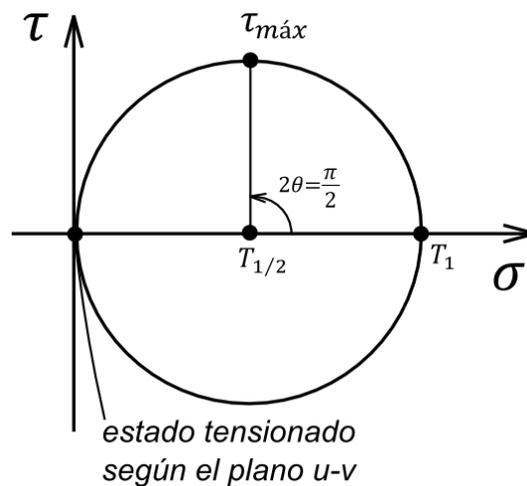


Figura 4.5: Círculo de Mohr para el punto "a" de la barra traccionada de las figuras 4.3 y 4.4.

La figura 4.5 muestra la circunferencia surgida de (4.11) en la cual cualquier punto de ella indica el estado tensional en un plano girado respecto al plano principal, un ángulo igual a la mitad del girado en la circunferencia. Por ello, un giro de 90° en la circunferencia corresponde a un giro de 45° en la barra. Si giramos 90° desde el punto $(T_1, 0)$ hasta el punto $(T_1/2, T_1/2)$, allí nos encontraremos con máxima tensión cortante cuya magnitud es igual al radio de la circunferencia. Además, convengamos en que un giro opuesto al sentido del reloj en la circunferencia, corresponde a un giro en el sentido del reloj en la situación real.

Todavía más, si giramos 180° en la circunferencia llegaremos a un corte en la barra que corresponde al plano $u-v$ en la figura 4.4. Según la circunferencia

(estamos en el origen de coordenadas) en el punto a según dicho plano, el estado tensional es nulo, cosa que es coherente con el hecho de que sobre ese plano no hay carga alguna actuando en a .

El círculo de Mohr -o en este caso la circunferencia de Mohr- es una propiedad gráfica de los tensores simétricos con componentes reales y fue muy utilizado en la Mecánica del Sólido en tiempos en que no era posible el cálculo. Realizando el círculo a escala podían medirse segmentos que, a escala, representaban las magnitudes de las tensiones en un punto según una orientación dada.

Volviendo a la figura 4.5, hemos mostrado que la misma encierra información tensional de un sistema plano de tensiones, donde en una dirección principal la tensión es nula. Podríamos demostrar sin mucho esfuerzo que, si en el plano $u-v$ existiese una tensión principal no nula de intensidad T_2 , por ejemplo, de tracción y menor que T_1 , la circunferencia de Mohr seguiría la siguiente ecuación y se vería como en la figura 4.6:

$$\left(\sigma - \frac{T_1 + T_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right)^2 \quad (4.12)$$

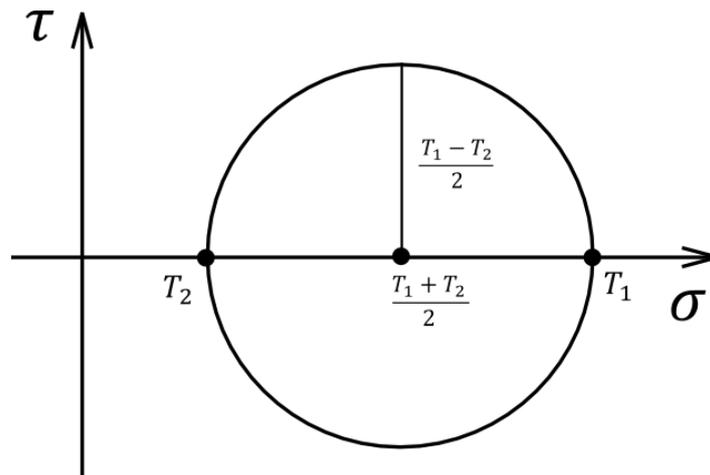


Figura 4.6: Círculo de Mohr para un estado biaxial de tensiones en un punto de un medio continuo.

Y para un estado triaxial de tensiones principales en un punto de un medio continuo, se tendrá además de la (4.12), las siguientes ecuaciones:

$$\left(\sigma - \frac{T_1 + T_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{T_1 - T_3}{2}\right)^2 \quad (4.13)$$

$$\left(\sigma - \frac{T_2 + T_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{T_2 - T_3}{2}\right)^2 \quad (4.14)$$

Si suponemos que $T_1 > T_2 > T_3$ y que todas son de tracción, los tres círculos se verán como en la figura 4.7.

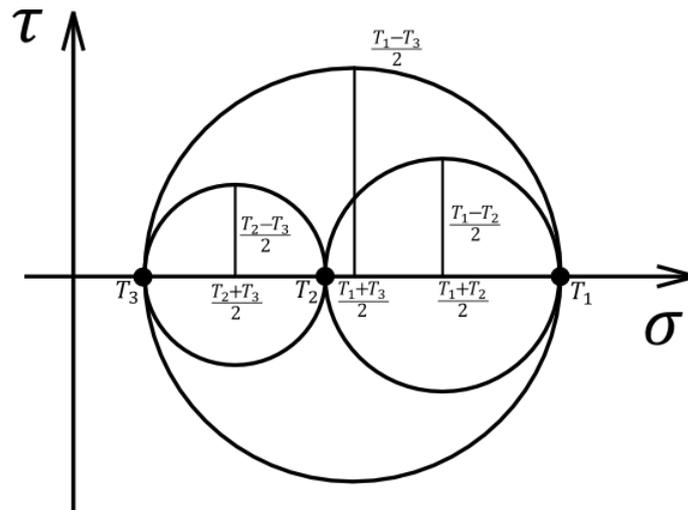


Figura 4.7: Círculo de Mohr para un estado triaxial de tensiones en un punto de un medio continuo⁶.

4.3.2 El continuo sólido: el sólido elástico lineal

Vale la pena en esta parte del desarrollo de nuestra Mecánica, dedicar un ítem al sólido elástico lineal que es la idealización de muchos materiales sólidos que se emplean rutinaria y masivamente en la ingeniería. La experiencia que hemos analizado traccionando la barra de la figura 4.3, es muy apropiada para definir el sólido elástico lineal en términos de dos parámetros materiales que surgen directamente de las mediciones que pueden realizarse. En efecto, es un hecho experimental que la barra se deforma estirándose por la acción de la carga y ésta es función del alargamiento. Si se grafica la relación F/A (es decir la tensión principal) respecto a la relación $\Delta L/L_0$ (esto es la deformación en la dirección del eje de la barra), muchos materiales, fundamentalmente el acero y prácticamente todos los metales, presentan una funcionalidad lineal entre estas magnitudes medidas. La figura 4.8 muestra este hecho para dos materiales donde se ve que la pendiente de la recta es un parámetro que distingue o diferencia un material de otro. Esa pendiente se denomina "modulo elástico" o "módulo de Young", sus dimensiones son las mismas que las de la tensión y lo simbolizaremos con E . La respuesta elástica lineal tiene un límite, más allá del cual el material cede deformándose incluso con disminución de tensión y más adelante el material se rompe en dos partes. Dentro del denominado campo elástico el hecho experimental plasmado en la figura 4.8 nos habilita a modelar tal comportamiento como:

$$T_1 = E \varepsilon_1 \tag{4.15}$$

Esta es la expresión más simple de la ecuación constitutiva para sólidos elásticos lineales llamada "ley de Hooke".

⁶ Se puede demostrar que los puntos de las zonas interiores de los círculos de Mohr, como los contenidos en el triángulo curvilíneo $T_3T_2T_1$, representan el estado tensional del punto analizado según planos de dirección arbitraria, es decir no paralelos a ningún eje coordenado.

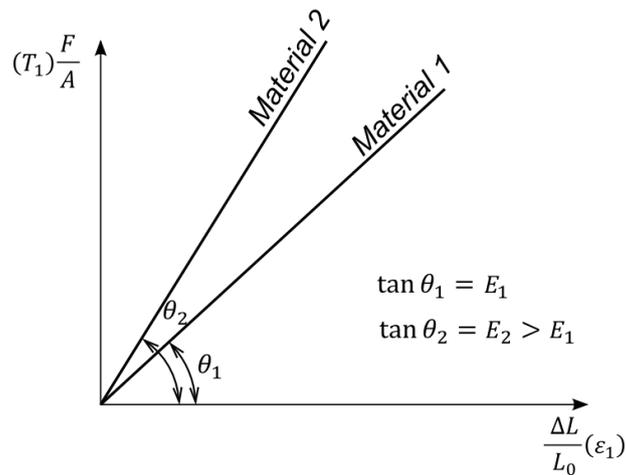


Figura 4.8: Diagrama tensión-deformación para dos materiales traccionados. La linealidad del diagrama permite definir al sólido elástico lineal. La pendiente de las rectas es un parámetro elástico que identifica al material.

Se define entonces a un sólido elástico lineal (ideal) con las siguientes características básicas:

- 1) Homogeneidad: posee la misma estructura en todas sus partes
- 2) Isotropía: posee las mismas características de resistencia en todas las direcciones. Dicho de otro modo, de cualquier barra que se corte en cualquier dirección de un trozo de sólido más grande, se obtendrán los mismos resultados experimentales.
- 3) Linealidad elástica: las tensiones y las deformaciones poseen una relación de proporcionalidad lineal como lo indica la expresión (4.15).
- 4) Independencia de la respuesta elástica respecto a la velocidad de aplicación de la carga.
- 5) Recuperación de la forma inicial cuando cesa la carga.
- 6) Deformaciones pequeñas.

Durante el proceso de carga y alargamiento en la dirección del eje de la barra, son observables acortamientos en las direcciones transversales, acortamientos que, en el campo de comportamiento elástico, son proporcionales al alargamiento en la dirección principal, es decir:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = C < 0 \quad (4.16)$$

La constante C es menor que cero debido a que siempre las deformaciones en las direcciones transversales son de distinto signo respecto a la que genera la carga considerada. Puede definirse entonces, un segundo parámetro elástico llamado "coeficiente de Poisson" que simbolizaremos por la letra griega ν :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \quad (4.17)$$

O lo que es lo mismo:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1 = -\nu \frac{T_1}{E} \quad (4.18)$$

Surge entonces la sorpresa que, a pesar de un estado uniaxial de tensiones, hay un estado triaxial de deformaciones, con lo cual un círculo de Mohr para las deformaciones en el plano de las direcciones principales 1 y 2 que se corresponda con el círculo de tensiones presentado en la figura 4.5, se vería como en la figura 4.9.

Como el círculo de Mohr es una propiedad de los tensores simétricos de componentes reales, el círculo para las deformaciones corresponde a la parte simétrica del tensor gradiente de desplazamiento (por analogía ver ítem 3.6), cuyos elementos no diagonales son la mitad de la distorsión angular total. Por ello en la figura 4.9, en la abscisa van las deformaciones longitudinales y en la ordenada la mitad de la deformación angular. Se ve que la máxima semi-deformación angular es el radio del círculo, es decir:

$$\frac{\gamma_{m\acute{a}x}}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{T_1}{E} - \left(-\nu \frac{T_1}{E} \right) \right] = \frac{T_1}{2E} (1 + \nu) = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{E} (1 + \nu)$$

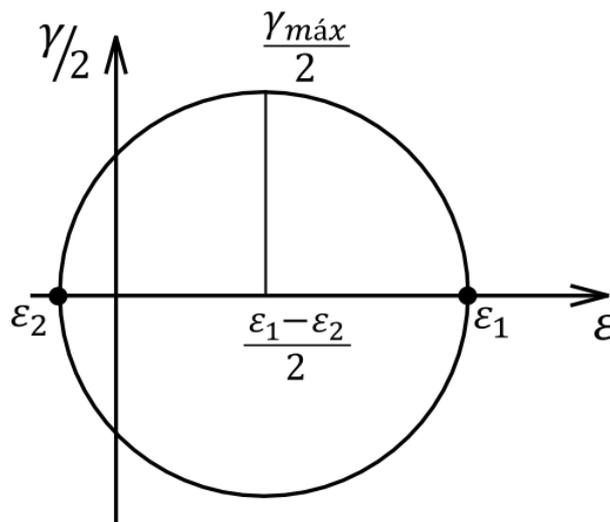


Figura 4.9: Círculo de Mohr para las deformaciones en el punto 'a' de la barra traccionada de las figuras 4.3 y 4.4.

De donde surge entre el primer y último término de la lista de igualdades que, la constante de proporcionalidad entre tensiones de corte o tangenciales y las correspondientes deformaciones angulares es $G = E / [2 (1 + \nu)]$. G es el denominado "módulo elástico al corte" que tiene su análogo para fluidos en la viscosidad. Luego y en general:

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma = G \gamma \quad (4.19)$$

4.4 El tensor de tensiones

El objetivo de este ítem es el estudio de la relación del vector de tensiones en un punto según una dirección cualquiera respecto a los vectores de tensión según las direcciones coordenadas. Algo ya hemos visto en el ítem 4.3 que ha sido expresado en la ecuación (4.8); esa relación unidimensional la generalizaremos a las tres dimensiones a través de lo cual quedará definido el "tensor de tensiones" que será fundamental en los desarrollos subsiguientes.

La estrategia teórica consiste en el planteo del principio del momento lineal en un volumen macroscópico pequeño que luego lo haremos tender a cero gradualmente. La figura 4.10 presenta dicho volumen con una forma apta para el posterior análisis, una forma tetraédrica cuyas caras se orientan según las direcciones coordenadas y según la dirección genérica identificada por \underline{n} .

Dado el tamaño reducido del volumen tetraédrico, podemos expresar ciertas integrales aplicando el teorema del valor medio cuando apliquemos la ecuación (4.3). Para ello expresaremos el volumen material ΔV como un tamaño genérico afectado por un factor de forma, es decir, $\Delta V = \alpha(t) \cdot L^3$, donde L es una longitud característica apropiada para ΔV . Esto es:

$$\frac{D}{Dt} (\overline{\rho v} \alpha(t) L^3) = (\overline{\rho g} \alpha(t) L^3) + \int_{Am(t)} \underline{t}(\underline{n}) dA \quad (4.20)$$

La línea superior en algunos factores de los integrandos, significa que ese factor es un valor promedio en el volumen. La integral de superficie ha quedado expresada como tal dado que se quiere realizar un análisis sobre ella, específicamente sobre el integrando. Si tomamos el límite para L tendiendo a cero, los términos de volumen tenderán a cero más rápidamente que los de área, porque son infinitésimos de orden superior respecto a estos últimos. Por ello, el primer término del segundo miembro se anulará; es decir, aquellos términos que dependen de la masa –por ende, del volumen- se anulan. Respecto al primer miembro, éste se volverá cero conforme L tiende a cero debido a que $-L-$ es independiente del tiempo, es decir:

$$\lim_{L \rightarrow 0} \left[\frac{D}{Dt} (\overline{\rho v} \alpha(t) L^3) \right] = \lim_{L \rightarrow 0} \left[L^3 \frac{D}{Dt} (\overline{\rho v} \alpha(t)) \right] = 0$$

Luego, tendremos:

$$\lim_{L \rightarrow 0} \int_{Am(t)} \underline{t}(\underline{n}) dA = 0 \quad (4.21)$$

La ecuación (4.21) expresa que, en el entorno de una partícula de un medio continuo sujeto a cargas, las fuerzas de superficie están en equilibrio porque no hay masa para acelerar. Debido a que nuestro análisis lo haremos sobre el vector de tensiones, debemos extraerlo de la integral y, para ello, volvamos a la (4.20), dividamos miembro a miembro por L^2 y tomemos el límite para L^2 tendiendo a

CAPITULO 4: TENSIONES EN MEDIOS CONTINUOS

ceros. El resultado respecto al miembro de la izquierda y el primer término de la derecha es el mismo que el dado anteriormente: se hacen cero. Luego, la expresión resultante es:

$$\lim_{L^2 \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \int_{Am(t)} \underline{t}(\underline{n}) dA = 0 \quad (4.22)$$

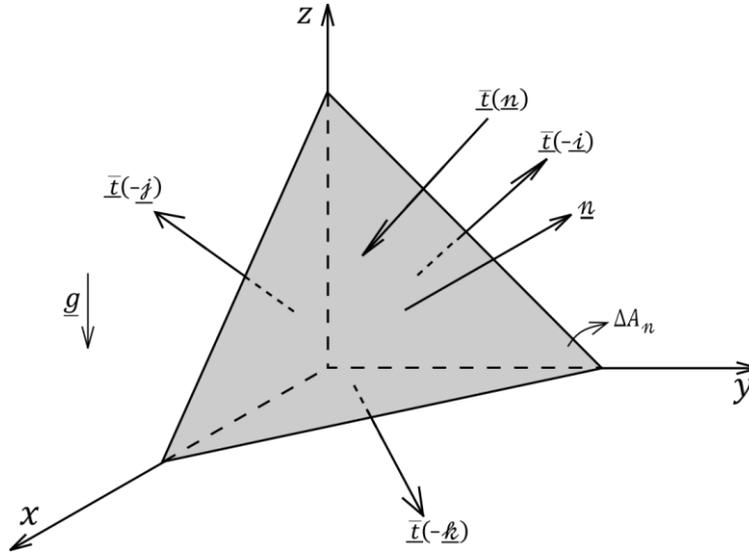


Figura 4.10: Volumen material pequeño de forma tetraédrica para el análisis de la relación entre los vectores de tensión según los planos coordenados y el vector de tensión según un plano orientado.

Si volvemos ahora a la figura 4.10, podemos expresar la ecuación (4.22) mediante el teorema del valor medio. Expresemos el área característica y genérica L^2 como el área del tetraedro en el plano octaédrico, ΔA_n , lo cual facilitará el análisis posterior. Es decir:

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A_n} \left[\overline{\underline{t}(\underline{n})} \Delta A_n + \overline{\underline{t}(-\underline{i})} \Delta A_x + \overline{\underline{t}(-\underline{j})} \Delta A_y + \overline{\underline{t}(-\underline{k})} \Delta A_z \right] = 0 \quad (4.23)$$

Donde nuevamente la línea superior en los integrandos significa un promedio, en este caso un promedio en las áreas. Teniendo en cuenta la relación entre las áreas del tetraedro, dado que las áreas en los planos coordenados son la proyección del área octaédrica, se tiene:

$$\Delta A_x = (\underline{n} \cdot \underline{i}) \Delta A_n ; \quad \Delta A_y = (\underline{n} \cdot \underline{j}) \Delta A_n ; \quad \Delta A_z = (\underline{n} \cdot \underline{k}) \Delta A_n \quad (4.24)$$

Luego:

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A_n} \left[\overline{\underline{t}(\underline{n})} \Delta A_n + \overline{\underline{t}(-\underline{i})} (\underline{n} \cdot \underline{i}) \Delta A_n + \overline{\underline{t}(-\underline{j})} (\underline{n} \cdot \underline{j}) \Delta A_n + \overline{\underline{t}(-\underline{k})} (\underline{n} \cdot \underline{k}) \Delta A_n \right] = 0$$

Simplificando el área octaédrica que divide y multiplica en todos los términos, la evaluación del límite sólo hará que los valores promedios tomen los valores en el punto.

$$\underline{t}(\underline{n}) + (\underline{n} \cdot \underline{i}) \underline{t}(-\underline{i}) + (\underline{n} \cdot \underline{j}) \underline{t}(-\underline{j}) + (\underline{n} \cdot \underline{k}) \underline{t}(-\underline{k}) = 0$$

Luego, teniendo en consideración la igualdad (4.7) y sacando como factor común el producto escalar con el versor \underline{n} :

$$\underline{t}(\underline{i}) = -\underline{t}(-\underline{i}) ; \quad \underline{t}(\underline{j}) = -\underline{t}(-\underline{j}) ; \quad \underline{t}(\underline{k}) = -\underline{t}(-\underline{k})$$

$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{n} \cdot [\underline{i} \underline{t}(\underline{i}) + \underline{j} \underline{t}(\underline{j}) + \underline{k} \underline{t}(\underline{k})] \quad (4.25)$$

El corchete de la expresión (4.25) es un tensor de segundo orden porque surge de la suma de tres diadas. Cada diada -a su vez- surge del producto entre el versor de un eje coordenado y el vector de tensión que actúa en el punto según el plano coordenado que define dicho versor. Obsérvese que la (4.25) es una generalización de la ecuación (4.8); en efecto, dicha ecuación se obtuvo para el caso de cargas más sencillo posible. El corchete se denominará "tensor de tensiones" y veremos seguidamente cuáles son sus elementos constitutivos.

La figura 4.11 muestra como ejemplo el plano (y,z) y el vector de tensión actuante sobre él que es el $\underline{t}(\underline{i})$. Dicho vector puede expresarse en sus componentes como:

$$\underline{t}(\underline{i}) = T_{xx} \underline{i} + T_{xy} \underline{j} + T_{xz} \underline{k} \quad (4.26)$$

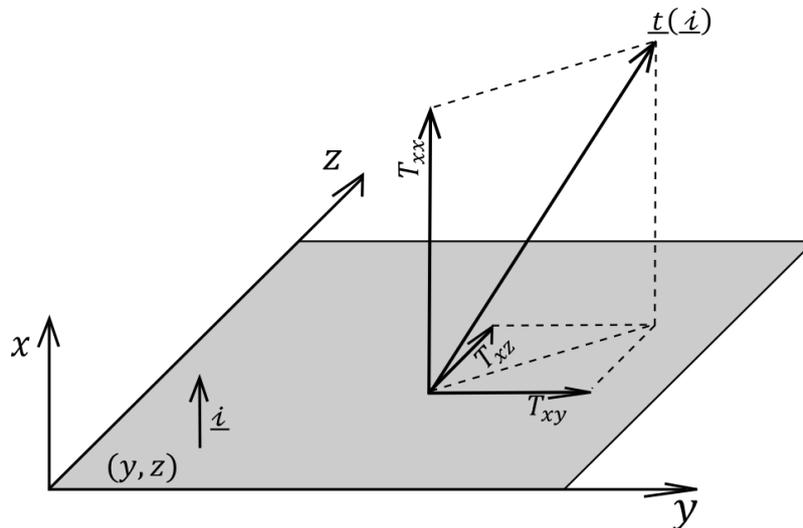


Figura 4.11: Vector de tensión actuante sobre el plano (y,z) , descompuesto en sus tres componentes.

donde T_{xx} , T_{xy} y T_{xz} son las componentes escalares del vector de tensiones según el plano (y,z) y se denominan tensiones. El primer subíndice indica la dirección normal del plano coordenado y el segundo subíndice expresa la dirección en la

CAPITULO 4: TENSIONES EN MEDIOS CONTINUOS

que actúa la tensión; en el subítem siguiente convendremos la interpretación de valores positivos y negativos de las tensiones. Considerando que $\underline{i} = 1 \underline{i} + 0 \underline{j} + 0 \underline{k}$, la primera diada del corchete de la expresión (4.25), será:

$$\underline{i} \underline{t}(\underline{i}) = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Del mismo modo, podemos generar las otras dos diadas que lucirán como sigue:

$$\underline{j} \underline{t}(\underline{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{k} \underline{t}(\underline{k}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

El corchete completo de la (4.25), esto es el tensor de tensiones, surge de sumar las diadas de las expresiones (4.27) y (4.28):

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Por último, la expresión (4.25) puede escribirse como:

$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{T} \quad (4.30)$$

4.4.1 Convención de signos para las tensiones

Las componentes del tensor de tensiones, en tanto números reales, pueden ser positivas, negativas e incluso nulas. El signo de las tensiones representará su sentido en la dirección en las que actúan, pero ello requiere que convengamos lo positivo y lo negativo en términos del plano en el que obran las tensiones. Diremos que una tensión cuyo valor es un número positivo sobre un plano con normal positiva, se dirigirá en el sentido positivo de la dirección en la cual actúa. Una tensión de valor negativo sobre un plano con normal positiva, se dirigirá en el sentido negativo de la dirección en la que actúa. Las figuras 4.12 a) y b) esquematizan tal convención de lo que se desprende que las tensiones de la figura 4.11 son todas positivas.

Luego, en un plano con normal negativa las tensiones positivas apuntarán en el sentido negativo de las direcciones en las que actúen y, las tensiones negativas, apuntarán en el sentido positivo de sus direcciones. Las figuras 4.12 c) y d) lo esquematizan.

Entre las figuras 4.12 a) y c) se ve que las tensiones normales positivas son de tracción y entre las figuras 4.12 b) y d) se ve que las tensiones normales negativas son de compresión.

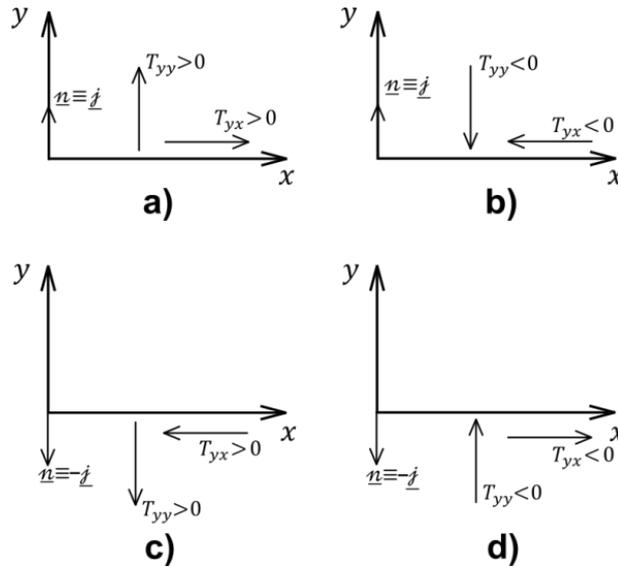


Figura 4.12:

Esquema para la definición de la convención de signos para las tensiones normales y tangenciales. Los esquemas a) y b) corresponden a tensiones sobre planos con normal positiva y los c) y d), a tensiones actuantes en planos con normal negativa.

4.5 Principio del momento angular y simetría del tensor de tensiones

De la misma manera en que hemos procedido en 4.2 para expresar el principio del momento lineal para un medio continuo, deformable y de masa constante, procederemos para expresar el principio del momento angular que, en palabras, dice: “la variación total respecto al tiempo del momento angular de un cuerpo, medido respecto a un origen inercial, es igual a la suma de los torques medidos respecto al mismo origen”. Es decir:

$$\frac{dL}{dt}\Big|_O = \sum_{i=1}^n M_i\Big|_O \text{ externos}$$

En el caso del volumen material de la figura 4.1 y tomando como origen el punto 'O', tendremos:

$$\frac{D}{Dt} \int_{Vm(t)} \underline{r} \times \rho \underline{v} dV = \int_{Vm(t)} \underline{r} \times \rho \underline{g} dV + \int_{Am(t)} \underline{r} \times \underline{t}(\underline{n}) dA \tag{4.31}$$

Aplicando ahora la ecuación (4.31) a un volumen material pequeño, haciendo uso del teorema del valor medio y de la misma manera que en 4.4, tendremos:

$$\frac{D}{Dt} (\overline{\underline{r} \times \rho \underline{v}} \alpha(t) L^3) = (\overline{\underline{r} \times \rho \underline{g}} \alpha(t) L^3) + \int_{Am(t)} \underline{r} \times \underline{t}(\underline{n}) dA \tag{4.32}$$

CAPITULO 4: TENSIONES EN MEDIOS CONTINUOS

donde los términos con la línea superior expresan valores promedios en el volumen material pequeño. Análogamente, si tomamos el límite para L tendiendo a cero, los términos que dependen del volumen se harán cero (el primer miembro también se anula por las razones discutidas en el ítem 4.4 para llegar a la ecuación 4.21), quedando la siguiente expresión:

$$\lim_{L \rightarrow 0} \int_{Am(t)} \underline{r} \times \underline{t}(\underline{n}) dA = 0 \tag{4.33}$$

que dice que en el entorno de una partícula los torques por fuerzas de superficie están en equilibrio, porque no hay masa que acelerar angularmente. Si recordamos la estática de fuerzas no concurrentes, ésta nos enseña que para un sistema no concurrente de fuerzas en equilibrio (ver ecuación 4.21), si el torque neto es nulo respecto a un origen, lo es también respecto a cualquier otro origen. Luego, la expresión (4.33) podemos analizarla cualitativamente en un elemento de fluido como el mostrado en la figura 4.13, cuya forma cúbica y tamaño diferencial son apropiados. Ello debido a que, si lo orientamos según los planos coordenados, se verán los vectores de tensión que actúan en el punto según dichos planos, es decir: $\underline{t}(i)$, $\underline{t}(j)$, $\underline{t}(k)$ y sus opuestos.

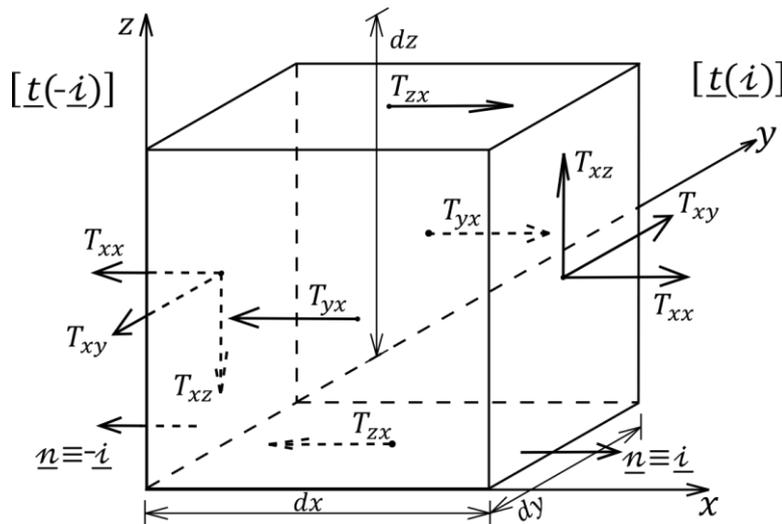


Figura 4.13: Volumen material diferencial para la comprobación de la simetría del vector de tensiones.

La figura 4.13 para no confundir el esquema, sólo muestra el vector de tensiones en las caras perpendiculares al eje x. El sistema de fuerzas –no concurrentes– dadas por el producto de las tensiones por las áreas sobre las que actúan cumple con la ecuación (4.21), es decir, cumple con el equilibrio de traslación. Para que dicho sistema cumpla con la ecuación (4.33), es decir el equilibrio de rotación, el torque neto que producen las fuerzas respecto a cualquier punto debe ser nulo. Elijamos el centro del cubo elemental como referencia de torques y veamos que si sólo existen las tensiones provenientes de $\underline{t}(i)$ y $\underline{t}(-i)$, dicho elemento no cumpliría con el equilibrio ya que el par de tensiones T_{xz} lo harían girar acelera-

damente respecto al eje y y las tensiones T_{xy} harían lo propio sobre el eje z . Por lo tanto, para que se satisfaga la ecuación (4.33) deben existir las tensiones T_{zx} sobre las caras con normales \underline{k} y $-\underline{k}$ que generen un torque opuesto sobre el eje y ; del mismo modo deben existir las tensiones T_{yx} sobre las caras con normales \underline{j} y $-\underline{j}$ de modo que generen un torque opuesto sobre el eje z . Para satisfacer el equilibrio de torques deberá cumplirse que $T_{yx} = T_{xy}$ y $T_{zx} = T_{xz}$. Similarmente puede demostrarse que $T_{zy} = T_{yz}$. En general puede decirse que $T_{ij} = T_{ji}$, es decir que el tensor de tensiones resulta ser simétrico.

Este hecho natural, que, por supuesto se cumple en cualquier sistema coordinado, es muy importante –entre otras cosas– para explicar algunos fenómenos relacionados con fallas de materiales anisotrópicos (materiales que resisten en forma distinta según la dirección de la carga) en direcciones que no son aquellas donde se sabe actúan las tensiones más grandes. Por ejemplo, es común que cilindros de madera veteada torsionados, se rajen en la periferia y en la dirección del eje. Ello ocurre porque la madera veteada o fibrosa –anisotrópica– resiste menos al corte en la dirección de las fibras que en la dirección transversal a las mismas. La torsión introduce tensiones en planos con normal en z y con dirección en θ , es decir $T_{z\theta}$ que son máximas en la periferia del cilindro. Por la simetría del tensor de tensiones, existen las tensiones $T_{\theta z}$ de la misma magnitud, que actúan en planos con normal en θ y en la dirección z , es decir, en planos diametrales. Estas tensiones son las responsables de las fallas antes mencionadas. La figura 4.14 esquematiza este caso.

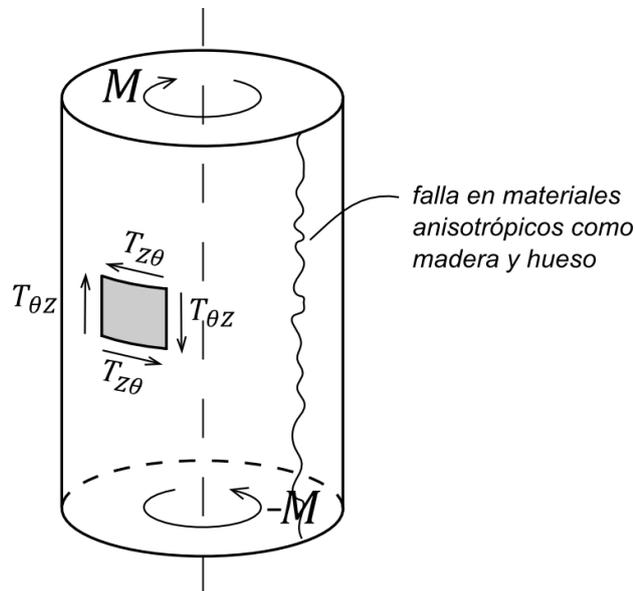


Figura 4.14: Esquema de la falla en la dirección del eje de barras cilíndricas torsionadas. Su explicación en términos de la simetría del tensor de tensiones.

Los huesos se comportan de manera análoga ⁷, por ello cuando algún esfuerzo de torsión –muy común en la tibia o peroné– supera la resistencia del hueso en la

⁷ Los huesos, como la madera, son materiales anisotrópicos y sus propiedades están en continuo cambio a lo largo de la vida. En la referencia [21] el lector encontrará una muy interesante tesis sobre remodelación ósea.

dirección de su eje, éste se fractura con una falla en dicha dirección. Como generalmente en estos casos los esfuerzos no son puros de torsión, hay otros esfuerzos como flexión y compresión que sumados a la geometría no cilíndrica del hueso hacen que la falla tenga otra direccionalidad, pero con una componente preponderante en la dirección del eje. Las figuras 4.15, a y b, presentan imágenes radiográficas ⁸ de un peroné y un húmero que han sufrido fracturas mayoritariamente debido a torsiones.



Figura 4.15-a: Peroné fracturado principalmente por una fuerte torsión, clásica de un giro sin deslizamiento del pie.

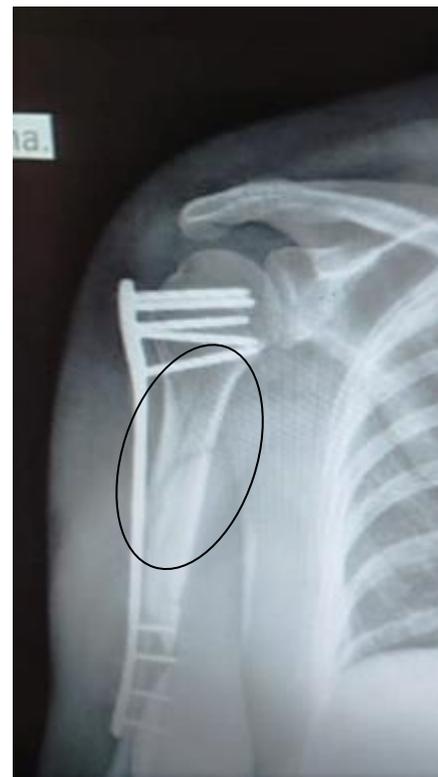


Figura 4.15-b: Húmero fracturado principalmente por una fuerte torsión debida a una caída. Obsérvese la fractura a lo largo del hueso.

4.6 Ley generalizada de Hooke

Hemos visto que, cuando un medio continuo es actuado por una tensión que lo deforma en una dirección, en direcciones transversales se producen deformaciones de signo contrario, proporcionales a la primera según el coeficiente de Poisson. Para generalizar lo modelado en virtud del hecho experimental de traccionar un sólido elástico cuyo comportamiento es lineal en alguna región

⁸ Las imágenes están en poder del autor y pertenecen a personas allegadas, las mismas no poseen derechos reservados.

de deformaciones, debemos plantear el caso en que un cuerpo cúbico es traccionado en las tres direcciones por tensiones -en general- distintas (ver figura 4.16).

Luego, en cada dirección la deformación se deberá a tres causas: el estiramiento que produce la tensión que actúa en dicha dirección y los acortamientos que producen las tensiones actuantes en las otras dos direcciones coordenadas. Por ello:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [T_1 - \nu (T_2 + T_3)] \quad (4.34)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [T_2 - \nu (T_1 + T_3)] \quad (4.35)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [T_3 - \nu (T_1 + T_2)] \quad (4.36)$$

Estas expresiones constituyen la generalización de la Ley de Hooke para un sólido elástico lineal sujeto en un determinado punto a tensiones principales. Cabe destacar que, aunque supusimos tensiones de tracción, las expresiones anteriores son válidas aún cuando algunas tensiones sean de compresión, en ese caso dichas tensiones deben tomarse como negativas.

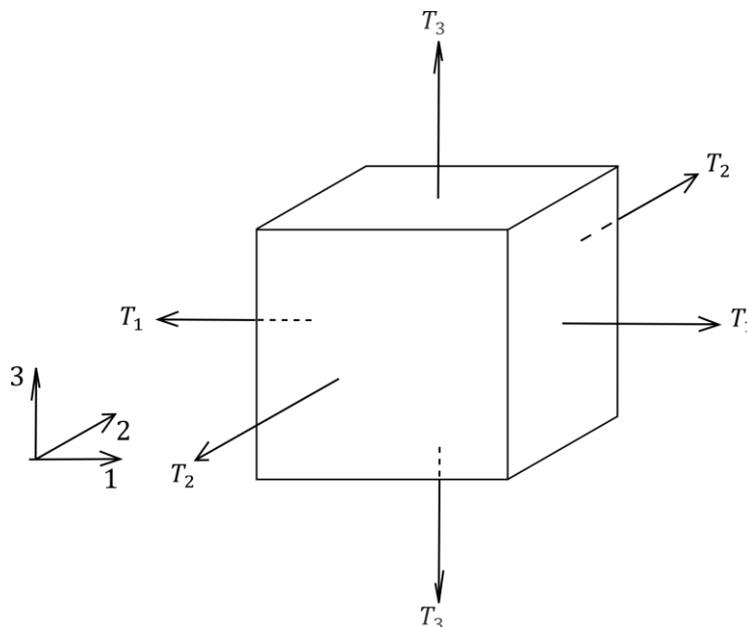


Figura 4.16: Elemento diferencial sujeto a un estado triaxial de tensiones principales.

Si el elemento cúbico de fluido no sólo se encuentra actuado por un estado triaxial de tensiones normales, sino que también se encuentra cargado con tensiones tangenciales en sus caras, la expresión de la ley generalizada de Hooke es la siguiente (ver figura 4.17):

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [T_{11} - \nu (T_{22} + T_{33})]$$

(4.37)

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [T_{22} - \nu (T_{11} + T_{33})]$$

(4.38)

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [T_{33} - \nu (T_{11} + T_{22})]$$

(4.39)

$$\gamma_{12} = \frac{T_{12}}{G} = \gamma_{21}$$

(4.40)

$$\gamma_{13} = \frac{T_{13}}{G} = \gamma_{31}$$

(4.41)

$$\gamma_{23} = \frac{T_{23}}{G} = \gamma_{32}$$

(4.42)

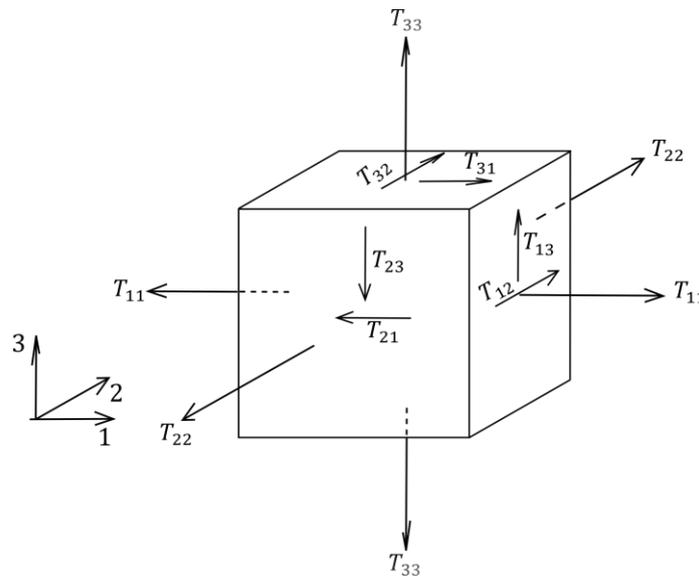


Figura 4.17: Elemento diferencial sujeto a un estado triaxial de tensiones normales con tensiones de corte en los planos.

4.6.1 Dilatación cúbica unitaria

Las tensiones tangenciales producen cambios de forma por distorsión angular, pero, al no cambiar las dimensiones espaciales de un elemento –porque no alargan ni acortan segmentos-, no varían el tamaño del mismo. Contrariamente, las tensiones normales alteran las dimensiones de un elemento material con lo cual el tamaño del mismo puede no ser el mismo luego de la deformación. Se habla entonces de la “dilatación cúbica unitaria”.

Supongamos un elemento cúbico cuyas dimensiones iniciales son $dV = dx \, dy \, dz$, y luego de la deformación sea $d'V = d'x \, d'y \, d'z$. Por definición las deformaciones longitudinales serán:

$$\varepsilon_{11} = \frac{d'x - dx}{dx} \Rightarrow d'x = (1 + \varepsilon_{11}) dx$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{d'y - dy}{dy} \Rightarrow d'y = (1 + \varepsilon_{22}) dy$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{d'z - dz}{dz} \Rightarrow d'z = (1 + \varepsilon_{33}) dz$$

Se define luego la dilatación cúbica unitaria "e" como:

$$\begin{aligned} e &= \frac{d'V - dV}{dV} = \frac{d'x d'y d'z - dx dy dz}{dx dy dz} \\ &= \frac{dx dy dz [(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) - 1]}{dx dy dz} \end{aligned}$$

que al despreciar los infinitésimos de orden superior surgidos por la distribución de productos entre deformaciones, queda:

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = Tr(\underline{\underline{D}}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \quad (4.43)$$

Donde $\underline{\underline{D}}$ es el tensor de deformaciones y Tr su traza o primer invariante.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) ¿El concepto de volumen material está de acuerdo con el concepto de cuerpo?
- 2) ¿Por qué razón las integrales espaciales de los diferentes balances se toman sobre el volumen y no sobre la masa?
- 3) Explique con esquemas la diferencia de efectos de una fuerza por contacto sobre un área en función de su orientación relativa.
- 4) Defina el vector de tensiones en un punto de un medio sujeto a fuerzas, como una magnitud relativa a la porción de fuerza por contacto actuante sobre un área y sus orientaciones relativas.
- 5) ¿Qué se requiere que suceda para que un cuerpo se deforme por la acción de fuerzas?
- 6) ¿Qué significa que la 2ª Ley de Newton para un cuerpo deformable en tamaño y forma, esté escrita con integrales?
- 7) ¿Qué significa que el vector de tensiones en un punto de un cuerpo continuo dado según una dirección, es opuesto al obtenido si la dirección tomada es la contraria?
- 8) Defina la denominada tensión principal para un punto de una barra traccionada.
- 9) Suponga agua dentro de un recipiente cilíndrico perfecto. Suponga que Ud. puede detener por un instante todos los mecanismos naturales y extraer el agua del recipiente como un sólido y depositarlo dentro de un recipiente irregular. Luego, suponga que nuevamente actúan los mecanismos naturales, que harán que el

CAPITULO 4: TENSIONES EN MEDIOS CONTINUOS

agua llene el nuevo recipiente hasta una altura determinada, tomando la forma de éste. ¿Cuáles son los mecanismos naturales que hacen que ello ocurra?

- 10) ¿Qué relaciona el círculo de Mohr para un punto de un medio sujeto a cargas?
- 11) ¿Que representa el radio del círculo de Mohr para un punto de un medio sujeto a cargas?
- 12) ¿Qué representan los puntos donde el círculo de Mohr corta el eje de abscisas?
- 13) ¿Si el círculo de Mohr para las tensiones en un punto de un medio cargado pasa por el punto $(0,0)$, qué significa?
- 14) Describa el ensayo de tracción de una barra de un material macroscópicamente homogéneo e isotrópico (como el acero) y la propiedad material que de allí se desprende para caracterizar elásticamente un material.
- 15) Establezca la ley de Hooke para el caso de tracción o compresión unidimensional y defina las características de un sólido elástico lineal ideal.
- 16) Establezca la propiedad material elástica llamada coeficiente de Poisson.
- 17) Obtenga la constante de proporcionalidad entre las tensiones tangenciales y las deformaciones angulares. ¿Por qué el círculo de Mohr para las deformaciones en un punto para tracción uniaxial, abarca parte del semiplano negativo?
- 18) ¿En el entorno de un punto de un cuerpo cargado, las fuerzas por contacto se encuentran en equilibrio?
- 19) Caracterice las componentes del tensor de tensiones en un punto de un cuerpo cargado.
- 20) Esquematice una tensión $T_{yy} > 0$ actuando en un plano con normal negativa y una tensión $T_{yz} < 0$ en ese mismo plano, pero con normal positiva.
- 21) Si la convención de signos de las tensiones en función del signo de la dirección normal de un plano, fuera la opuesta, ¿qué cambios deberían realizarse en la ley de viscosidad de Newton?
- 22) ¿Qué significa físicamente que el tensor de tensiones sea simétrico?
- 23) ¿La simetría del tensor de tensiones, implica el equilibrio de los torques de superficie en el entorno de un punto de un cuerpo cargado?
- 24) Expresé la ley generalizada de Hooke y llamada dilatación cúbica unitaria.

CAPITULO

5

Hidrostática

5.1 Introducción

Los fluidos en condiciones estáticas son motivo de estudio particularizado debido a los fenómenos que se producen por las fuerzas de contacto del fluido consigo mismo y/o con los cuerpos sumergidos, fuerzas que tienen su origen en la atracción gravitacional. La variación de la presión con la profundidad permite, por ejemplo, su aprovechamiento para la construcción de instrumentos de medición de la presión, y es la causa del empuje sobre los cuerpos sumergidos que da origen a la flotación y el cierre o apertura de compuertas dado un cierto nivel en un estanque.

5.2 Tensiones en un fluido en condiciones estáticas

La ecuación general de la hidrostática la obtendremos a partir de la ecuación (4.3), es decir a partir del principio del momento lineal para condiciones estáticas. Esto implica que el miembro de la izquierda es nulo dado que en condiciones estáticas la cantidad de movimiento de un fluido no cambia, es más, en condiciones de reposo, la cantidad de movimiento siempre es cero. Aclarando que en estas condiciones el volumen material pasa a ser un volumen de control fijo, lo mismo que sus áreas limitantes, se tiene:

$$0 = \int_V \rho \underline{g} dV + \int_A \underline{t}(\underline{n}) dA \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) representa un equilibrio entre las fuerzas de volumen y las de superficie. La expresión oportuna del vector de tensiones devendrá dicha ecuación en una ecuación utilizable prácticamente. En efecto, una partícula de un fluido en reposo sólo recibe fuerzas de compresión, en todas direcciones y de mayor intensidad cuanto mayor es la profundidad en la que se encuentra. Luego, en una dirección \underline{n} , el vector de tensiones tendrá como magnitud la presión, la dirección de \underline{n} y el sentido opuesto. Recordemos que el versor apunta hacia afuera y la fuerza por unidad de área es de compresión, por lo que apunta hacia adentro (de allí el signo negativo en la ecuación 5.2). Simbólicamente:

$$\underline{t}(\underline{n}) = -\underline{n} p_n \quad (5.2)$$

donde p_n es un número positivo que se denomina presión absoluta y que mediremos más adelante. El vector de tensiones para un fluido en reposo carece de componentes tangenciales, porque de tenerlas, el fluido se estaría moviendo. La incógnita a develar es la relación que hay entre las presiones según una dirección genérica como la \underline{n} y las presiones según las direcciones coordenadas (ver figura 5.1).

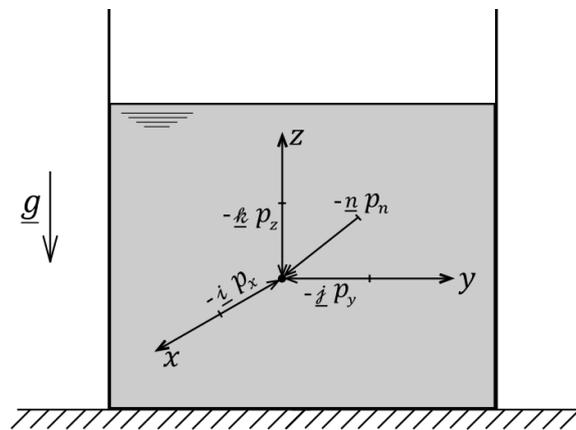


Figura 5.1: Tensiones de compresión en una partícula de fluido en reposo, según las direcciones coordenadas y una dirección genérica.

Si conocemos las presiones según las direcciones coordenadas y sabemos que no existen tensiones de corte o tangenciales, podemos escribir el tensor de tensiones para una partícula de fluido:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -p_x & 0 & 0 \\ 0 & -p_y & 0 \\ 0 & 0 & -p_z \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

5.2 TENSIONES EN UN FLUIDO EN CONDICIONES ESTATICAS

Sabemos también por la ecuación (4.30) que, para una dirección dada, el vector de tensiones es:

$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{T}$$

y por la ecuación (2.11),

$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{n} \cdot \underline{T} = T_{k,i} n_k \underline{e}_i \quad (5.4)$$

Dado que los elementos T_{ik} para $i \neq k$ de la (5.3) son nulos y $T_{11} = -p_x$, $T_{22} = -p_y$ y $T_{33} = -p_z$, la expansión de (5.4), utilizando los símbolos de las coordenadas en lugar de los índices 1, 2, 3, quedará:

$$\underline{t}(\underline{n}) = n_x (-p_x) \underline{i} + n_y (-p_y) \underline{j} + n_z (-p_z) \underline{k} \quad (5.5)$$

Además, por la (5.2) el vector de tensiones es

$$\underline{t}(\underline{n}) = n_x (-p_n) \underline{i} + n_y (-p_n) \underline{j} + n_z (-p_n) \underline{k} \quad (5.6)$$

Evidentemente, las expresiones (5.5) y (5.6) deben ser iguales, de donde surge que:

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p \quad (5.7)$$

La presión es la misma en todas las direcciones con lo cual todas las direcciones que pasan por una partícula de un fluido en reposo son direcciones principales; se dice que la presión es isotrópica o el estado tensional es isotrópico. Dadas tres direcciones mutuamente perpendiculares, los tres círculos de Mohr (ver ítem 4.3.1) que podrían dibujarse colapsarían en un punto como lo muestra la figura 5.2.

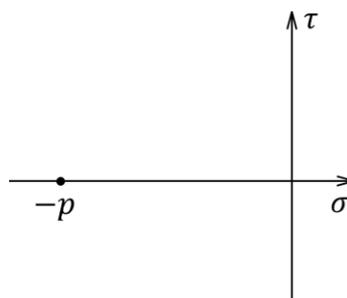


Figura 5.2: Círculos de Mohr colapsados en un punto como representación del estado tensional isotrópico en un punto de un fluido en reposo.

Finalmente, el tensor de tensiones lucirá de la siguiente forma:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p \underline{I} \quad (5.8)$$

y el vector de tensiones para un fluido en reposo, como:

$$\underline{t}(\underline{n}) = -\underline{n} p \quad (5.9)$$

Por último, conviene destacar que lo realizado ha sido beneficiado por el análisis genérico de las tensiones en un medio continuo presentado en los ítems 4.3 y 4.4. Sin ese desarrollo previo, deberíamos haber llevado adelante lo aquí presentado aplicando la ecuación (5.1) en una forma análoga a la seguida en el ítem 4.4, pero sobre un volumen de forma cúbica. El análisis genérico del ítem 4.4 nos permitirá, dando forma al tensor de tensiones, resolver diversas aplicaciones en la Mecánica de los Fluidos.

5.3 Ecuación diferencial de la hidrostática

Introduciendo la ecuación (5.9) en la (5.1) tendremos:

$$0 = \int_V \rho \underline{g} dV + \int_A -\underline{n} p dA \quad (5.10)$$

Como la integral de área está tomada sobre las áreas que rodean al volumen de fluido considerado y además posee la forma admitida por el teorema de Gauss, podemos transformarla en una integral de volumen y colocar las dos integrales bajo un mismo signo integral, es decir:

$$0 = \int_V (\rho \underline{g} - \underline{\nabla} p) dV \quad (5.11)$$

La satisfacción de la (5.11) en cualquier volumen de fluido en condiciones estáticas, requiere que el integrando sea nulo:

$$\rho \underline{g} - \underline{\nabla} p = 0 \quad (5.12)$$

La expresión (5.12) recibe el nombre de "ecuación diferencial de la hidrostática", su carácter es vectorial e implica las siguientes ecuaciones diferenciales escalares:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z \quad (5.13)$$

Las ecuaciones (5.13) se simplifican al extremo si uno de los ejes coordenados coincide con la dirección de la aceleración gravitacional. Por ejemplo, si éste es el caso del eje z como muestran las figuras 5.1 y 5.3, las ecuaciones (5.13) quedarán:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = \frac{dp}{dz} \quad (5.14)$$

5.3 ECUACION DIFERENCIAL DE LA HIDROSTATICA

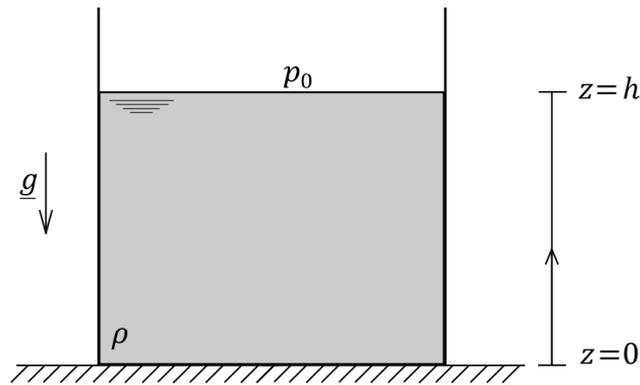


Figura 5.3: Recipiente con fluido en reposo para la obtención de la ley de variación de la presión hidrostática con las coordenadas.

Las ecuaciones (5.14) nos dicen que la presión no depende de las coordenadas x e y , siendo sólo función de z . Esto es, todos los puntos del fluido que se encuentren a una misma altura estarán a la misma presión, independientemente de la forma del recipiente. De aquí el concepto de vasos comunicantes y su utilización tecnológica para nivelar superficies: la conocida manguera transparente llena con agua que los albañiles utilizan para nivelar pisos entre otras cosas.

Por otra parte, la funcionalidad de la presión con la altura la determinaremos integrando la componente z de la (5.14).

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g z + C$$

La constante de integración se evalúa con un valor conocido de la presión en uno de los extremos del dominio de integración. Esto depende del problema y debe ser considerado en cada caso, pero para la figura 5.3 la condición de borde es que la presión en $z = h$ debe ser la atmosférica. Esto tiene su sustento en la continuidad de tensiones cuando la interfase es plana, además de suponer que se conoce el valor de la presión ambiental. El reemplazo de la condición referida nos da como resultado que:

$$p = p_0 + \rho g (h - z) \tag{5.15}$$

La (5.15) muestra que la presión varía linealmente con la coordenada z , que aumenta con la profundidad medida desde la interfase y que la presión ambiental se propaga a todos los puntos del fluido. Este es un hecho de suma importancia porque si elevamos la presión ambiental, esta elevación se propaga a todos los puntos del fluido. Aunque no lo parezca, esta es la justificación de la utilidad de los mandos hidráulicos: generar presión en un área de contacto con el fluido para que se propague a todo el fluido y , donde éste hace contacto con áreas más grandes, lograr de esta manera fuerzas amplificadas. Así funcionan los elevadores hidráulicos y los cilindros hidráulicos en general. Cada vez que accionamos los frenos de nuestro automóvil, lo estamos haciendo indirectamente a través de un fluido al que le elevamos la presión al accionar un émbolo a través del pedal.

El fluido a mayor presión actúa a su vez sobre pistones que accionan las pastillas hacia los discos de freno o las zapatas contra la campana de la llanta.

5.4 Medición de presión con columna de líquido

En puntos anteriores hemos hablado de la presión permanentemente y, en este momento podemos reiterar que: "la presión es la intensidad de la fuerza de compresión que en un punto ejerce un fluido, a partículas de sí mismo o a cuerpos sumergidos". Desde este punto de vista, la presión es una magnitud intrínsecamente positiva. La cuestión es cómo medirla, ya que -como decía Galileo- "no hay conocimiento físico sin medición".

La presión es una variable macroscópica, que tiene un sentido estadístico promedio, es decir, es la fuerza promedio resultante del choque sobre una superficie de las moléculas en movimiento pertenecientes a un fluido. Como magnitud promedio tiene una clara utilidad bajo la hipótesis de los medios continuos. Por otra parte, la ausencia de materia, la ausencia de moléculas chocando contra una superficie, será entonces el límite inferior de la presión: el valor cero. El vacío es un ambiente de presión cero.

Para medir la presión la expresión (5.15) nos ofrece la pista para hacerlo, es decir, el efecto de una presión puede ser equilibrado por una columna de fluido cuya altura se convierte en una medida indirecta de la presión. Esta fue la intuición de Evangelista Torricelli -un discípulo de Galileo-, que lo llevó a crear el barómetro y con él no sólo demostrar la existencia de la presión atmosférica sino también medir sus variaciones y entender las variantes climáticas.

5.4.1 Barómetro

Como decíamos en el párrafo anterior, Torricelli mostró que la presión atmosférica podía medirse indirectamente desde una columna de mercurio ubicada instrumentalmente como indica la figura 5.4.

Torricelli tomó un tubo de unos 80 [cm] cerrado en un extremo y lo llenó con mercurio hasta el tope, es decir al ras de la boca. Luego, cuidando no derramar nada, introdujo el extremo abierto del tubo en una cuba conteniendo mercurio, dejándolo en posición vertical. El mercurio del tubo descendió un poco dejando un espacio libre en su extremo superior. Como el tubo estaba inicialmente lleno, el espacio libre que quedó luego de sumergido debía ser necesariamente un espacio vacío, es decir sin materia. Lo que observó Torricelli es que la altura de la columna variaba con el estado del tiempo; esto es, con mal tiempo la columna tenía una altura menor que en los días normales y con muy buen tiempo la columna se veía más alta ¹. En un caso la presión atmosférica baja se equilibraba

¹ Así es, la altura de la columna de mercurio puede oscilar respecto a un valor medio que se toma representativo de una presión atmosférica normal. Valores superiores indican presiones atmosféricas "altas" coincidentes con días de muy buen clima. Las presiones altas generan flujos de aire hacia zonas de baja presión atmosférica (donde la columna de mercurio es más baja que el valor medio o normal), despejando el cielo de nubes e imposibilitando lluvias y tormentas. Éstas, se producirán en las zonas de baja presión, que reciben las nubes y el viento producto del flujo emanado de los centros de alta presión.

5.4 MEDICION DE PRESION CON COLUMNA DE LIQUIDO

con una columna de fluido menor y en el otro caso una presión atmosférica alta se equilibraba con una columna de fluido de mayor altura. Nosotros podemos corroborar analíticamente esas observaciones y demostrar que la presión atmosférica puede medirse indirectamente con la altura de una columna de líquido.

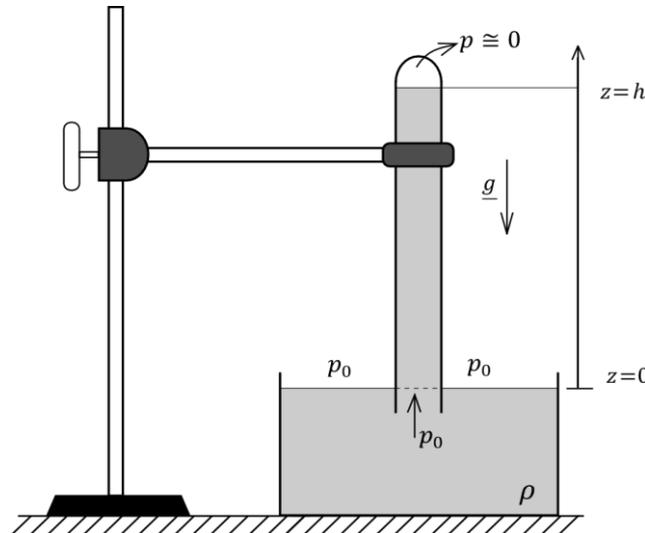


Figura 5.4: Esquema del barómetro de Torricelli para la medición de presiones absolutas, en este caso, la presión atmosférica ².

El mercurio en el tubo y la caba es un mismo fluido comunicado en condiciones de reposo, con lo cual debe satisfacerse punto a punto la ecuación diferencial de la hidrostática:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_{Hg} g \Rightarrow p = -\rho_{Hg} g z + C$$

Donde la condición de contorno es que, en el extremo de la columna, en su límite con el espacio vacío, la presión es nula. Esto se justifica con que la presión de vapor de mercurio a temperatura ambiente es muy baja (del orden de 10^{-6} de la presión atmosférica) con lo cual es casi imposible que haya vapor de mercurio llenando la cavidad y ejerciendo por tanto otra presión que no sea cero. Este es uno de los motivos por el que se utiliza mercurio y no agua –por ejemplo-, cuya presión de vapor en las mismas condiciones es mucho más alta que la del mercurio por lo que habría en la cavidad una buena cantidad de vapor de agua variando la presión de referencia. Luego, si en $z=h$, $p=0$

$$p = \rho_{Hg} g (h - z) \tag{5.16}$$

La baja presión necesariamente implica alta humedad ambiente porque al agua le cuesta menos pasar al estado vapor, luego, las moléculas de vapor que molecularmente pasan 18, al desplazar moléculas de aire que en promedio pesan 29, realimentan la baja presión. Además, reducen la presencia de oxígeno y aumentan la transferencia térmica del aire. Los días de baja presión en verano, son por ello agobiantes.

² En el enlace siguiente podrá ver un video del autor con la materialización del esquema de la figura 5.4. <https://drive.google.com/file/d/1hCEoQUf-Mr3WtE32WXVg5d88NpKPLZfw/view?usp=sharing>

Dado que las partículas de la interfase con el ambiente del fluido de la cuba están a la misma presión que los puntos dentro del tubo que están a la misma altura, es decir a la presión atmosférica, de la (5.16) surge que:

$$p_0 = \rho_{Hg} g h \quad (5.17)$$

Se estableció como valor normal de altura h de la columna de mercurio –en unidades actuales-, un valor de 760 [mm], con lo cual la presión normal en unidades internacionales es de 101.023 [Pa], para una densidad del mercurio de 13.550 [kg/m³] y una aceleración de la gravedad de 9,81 [m/s²]. Para los cálculos podemos tomar el valor de 101.000 [Pa] sin cometer errores apreciables.

Otra razón importante para no usar agua en un barómetro, es que el agua tiene una densidad 13,55 veces menor que la del mercurio con lo cual la altura de la columna ascendería a 10,3 [m]. Resultaría luego un barómetro impreciso y poco práctico .

El valor de la presión atmosférica es un dato climático que se informa diariamente, junto a la temperatura, la sensación térmica y la humedad relativa del ambiente. Hasta mediados de la década del 90 la presión atmosférica era informada en milímetros de mercurio, luego y en un ajuste a las unidades del sistema internacional, esta variable climática se informa en “hectopascuales” que se simboliza [hPa] y equivale a 100 [Pa]. Una presión atmosférica normal sería entonces de 1.010 [hPa].

Por último, decimos que un barómetro mide presiones absolutas, es decir con referencia al vacío o presión cero. Con un barómetro podría medirse la presión absoluta de cualquier ambiente.

5.4.2 Manómetro

Una vez determinada la presión atmosférica es posible medir otras presiones con referencia a ella. Estas son las llamadas presiones manométricas que realmente son presiones efectivas con respecto a la presión ambiental. Está claro que puede medirse cualquier diferencia de presiones entre dos ambientes cualesquiera, aunque lo usual es entender un valor de presión manométrica como una presión diferencial respecto a la atmósfera. La figura 5.5 representa un manómetro de tubo en U abierto a la atmósfera con columnas de líquido de distinta altura en ambas ramas.

En el fluido del tubo debe cumplirse la ecuación diferencial de la hidrostática punto a punto, es decir:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g z + C$$

La valoración de la constante surge de conocer que, en la interfase entre el líquido manométrico y el aire ambiental, la presión debe ser la atmosférica, es decir, en $z = z_2$, $p = p_0$. Luego:

5.4 MEDICION DE PRESION CON COLUMNA DE LIQUIDO

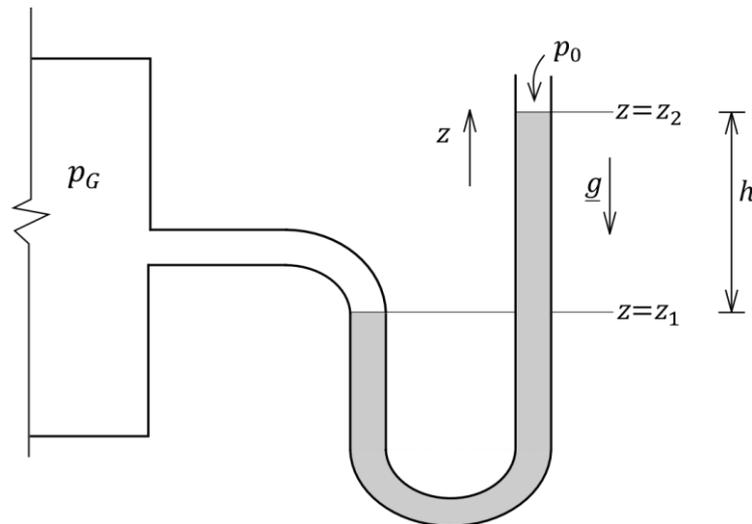


Figura 5.5: Esquema de un manómetro de columna de líquido para la medición de presiones relativas o manométricas. En este caso respecto a la atmósfera.

$$p = p_0 + \rho g (z_2 - z) \quad (5.18)$$

En $z=z_1$ la presión del líquido debe ser igual a la presión del ambiente, supuesto relativamente presurizado respecto a la atmósfera.

$$p_G = p_0 + \rho g (z_2 - z_1)$$

Como lo que en realidad interesa es la diferencia de presión a la que llamaremos "presión manométrica", se tiene:

$$p_m = (p_G - p_0) = \rho g h \quad (5.19)$$

Nuevamente, una altura o más precisamente, una diferencia de alturas, se convierte en la medida indirecta de una presión, en este caso manométrica. Hay que destacar que p_m puede ser positiva, cero o negativa, en los casos en que la presión absoluta de un ambiente sea mayor, igual o menor que la presión atmosférica respectivamente.

Es usual que en la práctica ingenieril se den presiones manométricas varias veces mayor que la presión atmosférica, por lo cual su medición con manómetros de columna de líquido se vuelve impracticable por las dimensiones que alcanzarían, incluso con mercurio. Por ello, en estos casos se utilizan manómetros con otros principios de funcionamiento. No obstante, los manómetros de columna de líquido permiten medir con muy buena precisión presiones diferenciales de pequeño valor. Esto se debe a que si se utiliza un líquido de baja densidad ³ (en lo posible de baja presión de vapor a la temperatura de medición), como muestra la expresión (5.19) la altura diferencial de las ramas del tubo en U será lo suficientemente grande para medirla con precisión.

³ Debe notarse que, aunque solo la densidad está involucrada en la medición de presiones, no deberían usarse líquidos viscosos para los manómetros, por la resistencia que ofrecerían al ascenso capilar. El agua y el mercurio tienen viscosidades muy bajas y son los utilizados para barómetros y manómetros respectivamente.

5.4.4 Escalas de medición de presión

Los subítems 5.4.1 y 5.4.2 establecen dos escalas para medir presiones, una de valor para la Física, la llamada escala absoluta, y la otra de uso ingenieril, la llamada escala manométrica que, si no se argumenta en contrario, se asume que es una escala de presiones relativas a la presión atmosférica. La figura 5.6 presenta una interpretación gráfica de ambas escalas, donde se han marcado los valores de la presión del vacío y de la atmósfera en cada una.

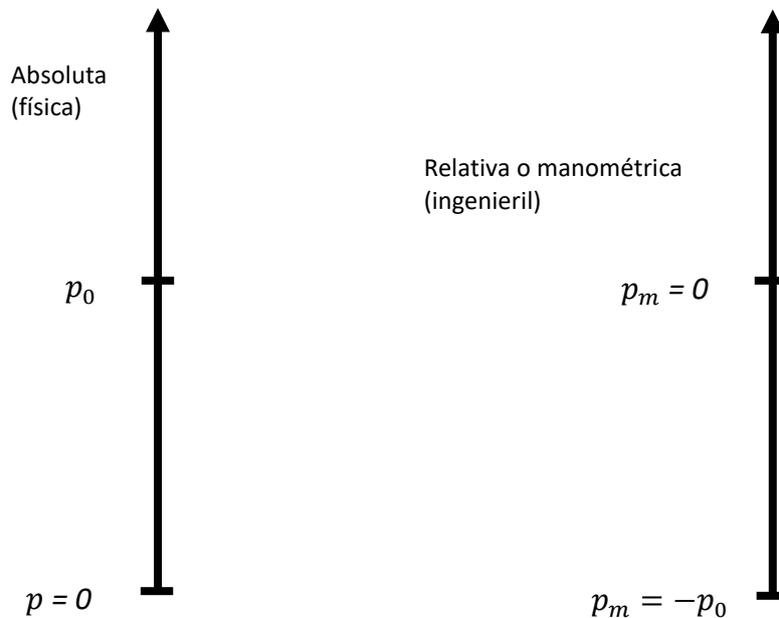


Figura 5.6: Escalas de medidas de presión, absoluta (respecto al vacío) y manométrica (respecto a la atmósfera (p_0)).

5.5 Fuerzas ejercidas por fluidos sobre superficies planas y curvas

Como hemos dicho reiteradas veces en este capítulo, los fluidos ejercen presión sobre cualquier cuerpo sumergido en su seno, hecho que puede explotarse con fines tecnológicos. Como la fuerza que origina la presión es una fuerza de contacto, para su estudio vamos a dividir las superficies de los cuerpos en planas y curvas.

5.5.1 Fuerza sobre superficies planas

La figura 5.7 muestra una compuerta genérica ubicada en un ángulo θ respecto a la dirección horizontal. El líquido de densidad ρ y altura h ejerce una fuerza sobre la compuerta que, si no existiese el tope B , haría que ésta basculase sobre A abriéndose. Supongamos que la compuerta tiene un ancho b en la dirección perpendicular al dibujo, luego, la fuerza que el líquido ejerce sobre ella será:

$$\underline{F} = \int_A -\underline{n} p \, dA \quad (5.20)$$

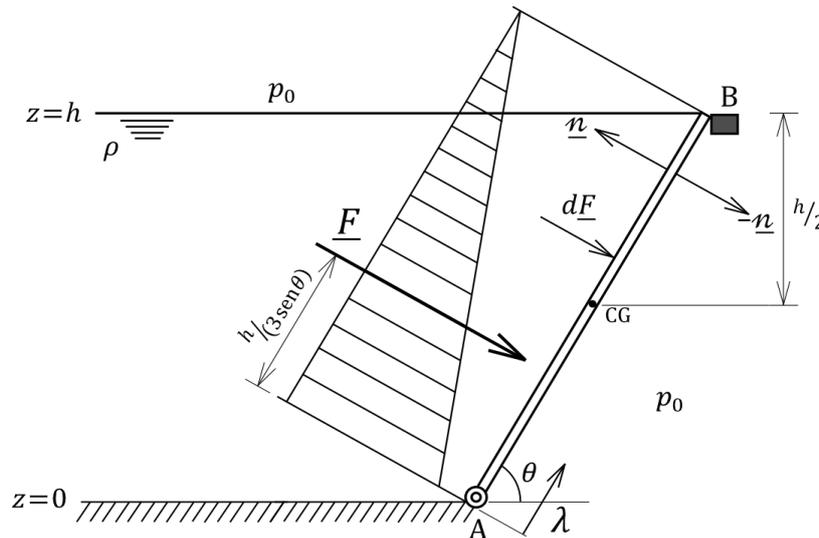


Figura 5.7: Fuerza producida por la presión hidrostática sobre una placa plana sumergida.

La solución de la integral requiere conocer primero la distribución de presión, en este caso es válida la expresión (5.15). Cabe aclarar que no siempre será válida la (5.15), en este caso lo es porque ha sido obtenida para un líquido en contacto con aire a presión normal y para un sistema coordenado idéntico al de la figura (los valores de la presión no dependen del sistema coordenado pero la expresión de donde se obtienen, sí depende). Genéricamente hablando, cada situación problemática de este tipo requerirá el planteo de la ecuación diferencial de la hidrostática y su integración con la correspondiente condición de contorno del problema.

Evidentemente, la fuerza \underline{F} estará dada por la suma de infinitas fuerzas $d\underline{F}$ cuyo módulo estará dado por el producto de la presión y el diferencial de área en el que actúa. Luego, por la condición espacial de la figura, la integral doble en el área total podrá transformarse en una integral simple definiendo el dA como $b \, d\lambda$, siendo λ una coordenada que corre sobre el borde de la placa y tiene su origen en A.

Debe destacarse que en este caso la presión atmosférica actúa sobre la compuerta con una fuerza neta nula. En efecto, p_0 actúa a través del líquido en el área con normal \underline{n} y desde el ambiente sobre el área con normal $-\underline{n}$ originando fuerzas iguales y opuestas que se anulan mutuamente. En cada problema debe analizarse el efecto de la presión atmosférica dado que puede darse el caso en que actúe en ambos lados de una compuerta, pero sobre áreas distintas con lo cual la fuerza neta por ella no sería cero.

El módulo de la fuerza neta originada por el líquido sobre la compuerta, fuerza que tendrá la dirección y el sentido de $-\underline{n}$, se obtiene fácilmente teniendo en cuenta la relación entre z y λ :

$$F = \int_0^{h/(\text{sen } \theta)} \rho g (h - \lambda \text{sen } \theta) b d\lambda = \frac{\rho g h^2 b}{\text{sen } \theta} - \frac{\rho g h^2 b}{2 \text{sen } \theta} = \frac{\rho g h}{2} \cdot \frac{(h b)}{\text{sen } \theta} \quad (5.21)$$

Donde puede notarse que el resultado es el producto de la presión debida a la columna de líquido a la altura del centro de gravedad de la placa y la superficie de la misma. Obsérvese que este resultado es válido para cualquier valor de θ excepto 0; en ese caso límite tendríamos la fuerza sobre un área del fondo del recipiente y estaría dada por $(\rho g h)$ multiplicado por la superficie del fondo.

Si quisiésemos conocer el punto de paso de la fuerza como una resultante, tendríamos que aplicar la ecuación de momento respecto a un origen, por ejemplo, el punto A:

$$\underline{M} = \int_A \underline{r} \times (-\underline{n} p) dA = \underline{\hat{r}} \times \underline{F} \quad (5.22)$$

Por la geometría del sistema analizado, el vector momento \underline{M} tiene la dirección perpendicular al dibujo y un sentido tal que veríamos la cola de la flecha. Por las mismas consideraciones hechas para llegar a la (5.21), tenemos:

$$M = \int_0^{h/(\text{sen } \theta)} \rho g (h - \lambda \text{sen } \theta) b \lambda d\lambda = \frac{\rho g h^3 b}{2 \text{sen}^2 \theta} - \frac{\rho g h^3 b}{3 \text{sen}^2 \theta} = \frac{\rho g h^3 b}{6 \text{sen}^2 \theta} \quad (5.23)$$

Para obtener la posición del punto de paso de la fuerza, planteamos que:

$$M = \frac{\rho g h^3 b}{6 \text{sen}^2 \theta} = \hat{r} F = \hat{r} \frac{\rho g h^2 b}{2 \text{sen } \theta} \Rightarrow \hat{r} = \frac{h}{3 \text{sen } \theta} \quad (5.24)$$

La posición de paso de la fuerza se encuentra a un tercio de la altura de la placa, que es la posición del centro de gravedad o baricentro de la distribución de carga lineal que ejerce la presión por columna de líquido.

El cálculo del momento permite, entre otras cosas, determinar el valor de las reacciones en los puntos A y B que equilibran la placa.

5.5.2 Fuerzas sobre superficies curvas

En el caso de superficies curvas, la integración de la ecuación (5.20) es compleja y en algunos casos podría ser no resoluble, debido a que debe hacerse sobre superficies alabeadas, de las cuales es necesario conocer sus ecuaciones. Luego, una forma más sencilla surge expresando el versor \underline{n} en sus componentes:

$$\underline{F} = \int_A -\underline{n} p dA = \underline{i} \int_A -n_x p dA + \underline{j} \int_A -n_y p dA + \underline{k} \int_A -n_z p dA \quad (5.25)$$

$$\underline{F} = \underline{i} \int_A -p \, dA_x + \underline{j} \int_A -p \, dA_y + \underline{k} \int_A -p \, dA_z \quad (5.26)$$

Donde A_x , A_y y A_z son las áreas proyectadas de la superficie curva sobre los planos coordenados yz , xz y xy respectivamente. La figura 5.8 muestra este hecho.

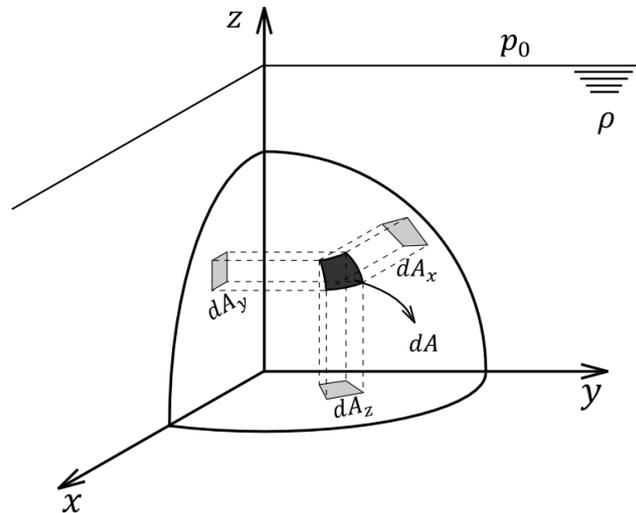


Figura 5.8: Fuerza producida por la presión hidrostática sobre una superficie curva sumergida. Se ven las proyecciones de un elemento de área sobre los planos coordenados.

Por lo tanto, el cálculo de la magnitud de cada componente es una integración sobre un área plana. La clave para resolver cada integral es poder vincular las variables que dominan el área con la coordenada z , de la cual depende la presión. La figura 5.9 presenta el caso de un fondo semiesférico de radio R que utilizaremos como ejemplo para mostrar el procedimiento de integración cuando el cuerpo posee una geometría que lo permite.

Para empezar, diremos que nuevamente es aplicable la función de la presión dada por la expresión (5.15). Como la presión atmosférica actúa desde el fluido y desde abajo en este ejemplo, ejercerá una fuerza neta nula sobre la superficie curva. La fuerza neta tendrá un módulo dado por:

$$F_z = - \int_{A_z} p \, dA_z = - \int_{A_z} \rho g (h - z) \, dA_z$$

Como el área está dominada por la variable r y la presión por la variable z , puede obtenerse desde la ecuación de la superficie una relación entre ambas y convertir la integración a una operación en una variable. En todo punto de la superficie, r y z se relacionan por la ecuación de la circunferencia y el diferencial de área proyectada puede tomarse como una corona circunferencial de radio r y espesor dr :

$$R^2 = r^2 + z^2 \Rightarrow z = \sqrt{(R^2 - r^2)} ; \quad dA_z = 2 \pi r \, dr$$

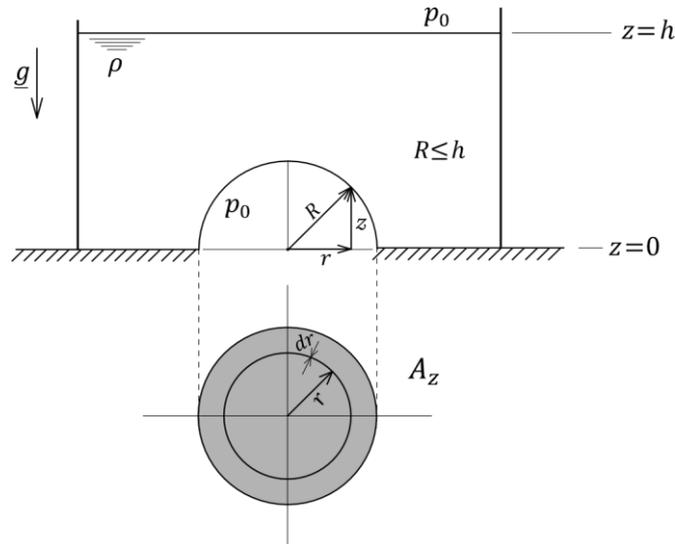


Figura 5.9: Fondo semiesférico sometido a una fuerza producida por la presión hidrostática. Se ve el área proyectada del casquete sobre el plano (x,y) .

$$F_z = - \int_0^R \left[\rho g h - \rho g \sqrt{(R^2 - r^2)} \right] 2 \pi r dr$$

Separando las integrales y resolviendo con el uso de tablas, se tiene:

$$F_z = \pi \rho g R^2 \left(\frac{2}{3} R - h \right) < 0 \Leftrightarrow R \leq h$$

5.5.3 Empuje sobre cuerpos sumergidos. Principio de Arquímedes

En cuerpos totalmente sumergidos las componentes x e y se anulan porque el fluido ejerce fuerzas iguales y opuestas en puntos a una misma altura, pero es distinta de cero la componente z comúnmente llamada "empuje". El valor de éste según Arquímedes, es el peso del volumen de fluido desalojado; nosotros podemos ahora demostrar aquello que el griego obtuvo experimentalmente. La figura 5.10 muestra un cuerpo totalmente sumergido, que por claridad lo supondremos una esfera; la curva donde $\underline{k} \cdot \underline{n} = 0$, divide las superficies superior e inferior de la misma. La diferencia de magnitudes entre la fuerza hacia arriba que ejerce el fluido sobre el cascarón inferior (A_2) y la fuerza que ejerce hacia abajo sobre el cascarón superior (A_1), será el empuje. Luego:

$$\underline{F} = \int_A - \underline{n} p dA = \int_{A_1} - \underline{n}_1 p dA_1 + \int_{A_2} - \underline{n}_2 p dA_2$$

La componente z estará dada por

$$E = \underline{F} \cdot \underline{k} = \int_{A_1} - (\underline{k} \cdot \underline{n}_1) p dA_1 + \int_{A_2} - (\underline{k} \cdot \underline{n}_2) p dA_2$$

En el cascarón superior el producto $\underline{k} \cdot \underline{n}_1 > 0$ en todo punto y la presión es función de z , particularmente para los valores que están por arriba de la curva que divide

las superficies. En el cascarón inferior el producto $\underline{k} \cdot \underline{n} < 0$ en todo punto y la presión es función de z , en este caso para los valores que están por debajo de la curva que divide las superficies. La expresión (5.15) es válida para este análisis, por lo cual:

$$E = \int_{A_z} -p(z_1) dA_z + \int_{A_z} p(z_2) dA_z$$

$$E = \int_{A_z} \rho g [(h - z_2) - (h - z_1)] dA_z = \rho g \int_{A_z} (z_1 - z_2) dA_z = \rho g V \tag{5.27}$$

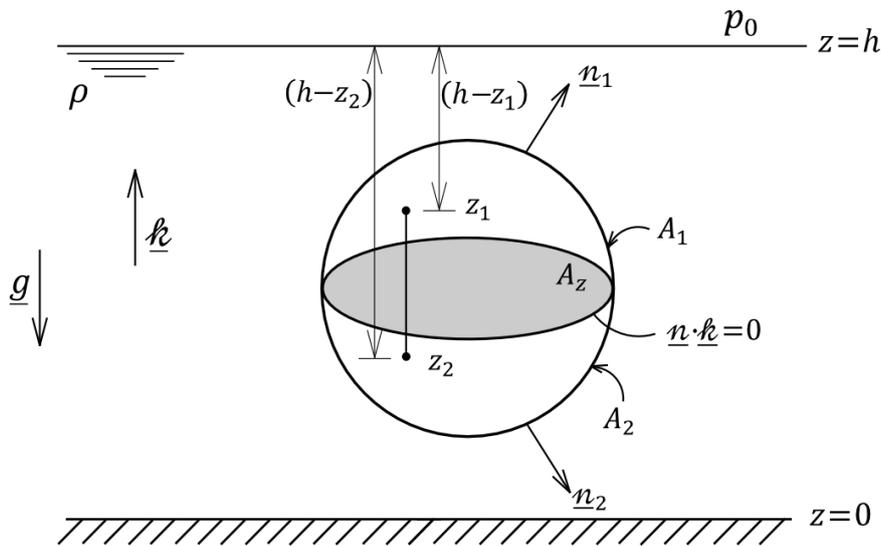


Figura 5.10: Cuerpo esférico sumergido sujeto a la presión hidrostática del fluido que lo rodea. El cálculo de la fuerza neta hacia arriba sobre el cuerpo corrobora el principio de Arquímedes.

La integral del último término de la expresión (5.27) es el volumen del cuerpo, con lo cual se demuestra el principio de Arquímedes: "el empuje es igual al peso del fluido desalojado.

Cabe destacar que hay casos en que se desaloja fluido y los cuerpos no reciben empuje, o, al contrario, reciben una fuerza neta de parte del líquido dirigida hacia abajo. La figura 5.11-a muestra un cuerpo cilíndrico en posición vertical que sobrepasa el nivel de líquido y también el fondo. En estas circunstancias, el cilindro desplaza volumen de fluido, pero no presenta áreas con proyección en el plano xy para que la presión ejerza una fuerza diferencial hacia arriba: no hay empuje. La figura 5.11-b, por su parte muestra un tapón colocado en un fondo de recipiente. Por encima de la línea donde $\underline{k} \cdot \underline{n} = 0$, el mismo presenta un área superior que tiene proyección completa sobre el plano xy , mientras que el área en contacto con líquido por debajo de la línea mencionada, sólo tiene como proyección una parte del área total proyectada, con lo cual y a pesar que las presiones debajo son mayores, la fuerza neta se debe a la presión actuante en la parte superior: hay empuje pero hacia abajo. Este tipo de tapones se utilizan

como cierres de mochilas de inodoro, a los que debemos ejercerle una fuerza para levantarlos y posibilitar la descarga.

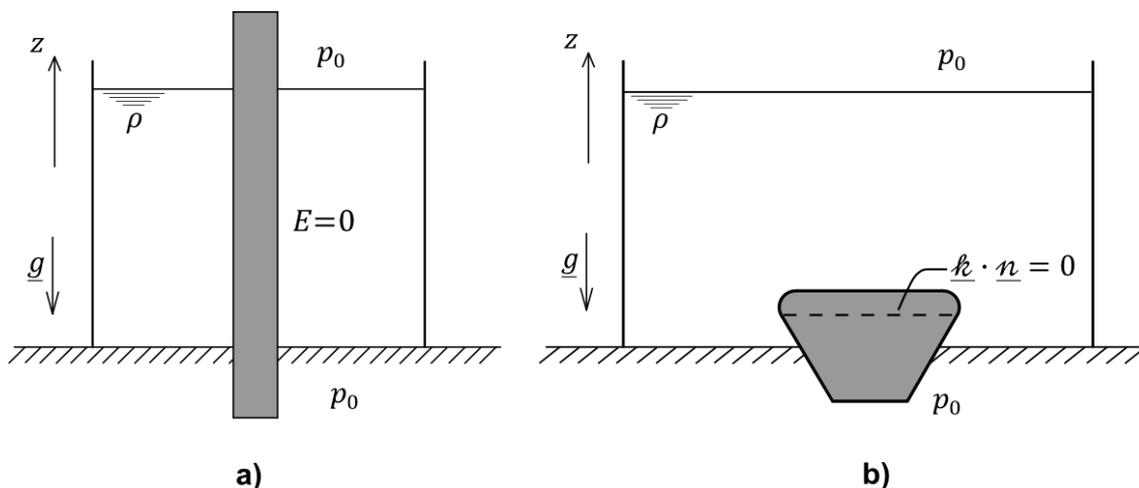


Figura 5.11: Cuerpos sumergidos que no reciben empuje o que lo reciben hacia abajo a pesar de desalojar líquido. a) Un cilindro que recibe una fuerza neta nula en cualquier dirección, b) un tapón en el fondo de un recipiente que recibe una fuerza neta vertical hacia abajo.

Consecuentemente, decir que todo cuerpo sumergido recibe un empuje de abajo hacia arriba no es suficiente para abarcar todos los casos. Para generalizar deberíamos decir: "todo cuerpo sumergido que presente mayor interacción con el fluido debajo de la línea donde se cumple que $\underline{k} \cdot \underline{n} = 0$, recibirá un empuje de abajo hacia arriba". En los cuerpos que flotan, en general la línea ya no es aquella donde $\underline{k} \cdot \underline{n} = 0$ sino que es la que surge de la intersección del plano de la interfase con el cuerpo.

5.5.4 Flotación y estabilidad

El transporte por agua es una actividad antiquísima que es posible gracias a la flotación, pero las naves deben ser estables a ella. En el sentido vertical la estabilidad se da naturalmente porque un aumento de peso de la embarcación se contrarresta con un aumento del volumen sumergido y por ende del empuje, del mismo modo una disminución del peso se equilibra con una disminución del empuje. El problema más acuciante es el de la estabilidad lateral, es decir, las naves deben ser resistentes al vuelco. Analizaremos seguidamente la estabilidad de flotación de un cuerpo prismático, para obtener una relación básica que prediga la condición de estabilidad. En la figura 5.12 se ve este objeto de largo L . Destaquemos que V_0 es el volumen hundido del prisma cuando su eje z está vertical, V es el volumen hundido cuando el prisma ha girado sobre su eje y , liberando volumen y sumando a la vez volumen. C es la posición del bariscentro de V_0 y C' la posición del bariscentro de V , mientras G es la posición del centro de gravedad del objeto completo.

Cuando el prisma bascula, volverá a su posición vertical si la fuerza de flotación y el peso del objeto, generan un momento restaurador. En la basculación, el volumen inicial gana volumen de un lado y pierde volumen del otro lado. Luego:

$$V = V_0 + V_g - V_p$$

La posición de C' puede obtenerse planteando momentos de primer orden respecto al eje z , donde la línea superior indica promedios.

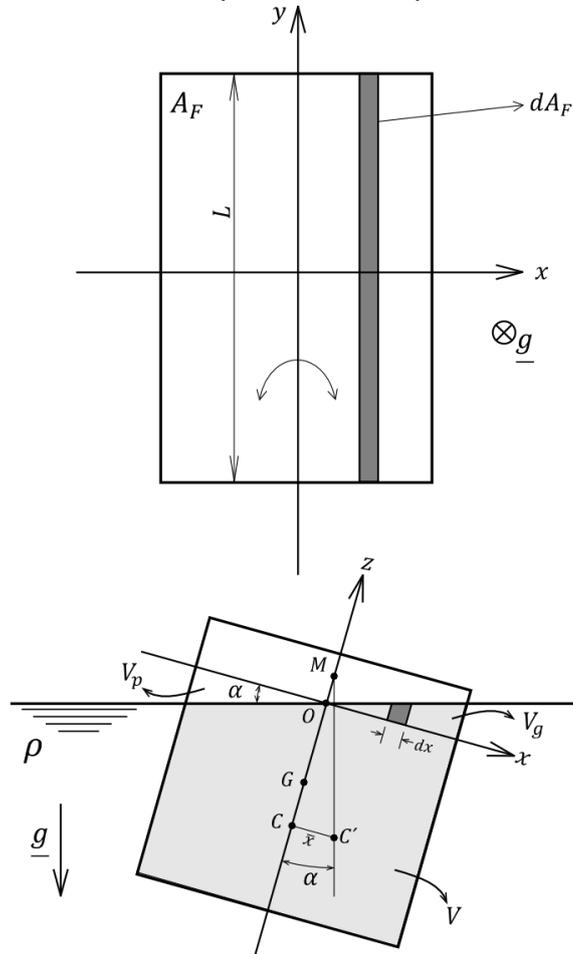


Figura 5.12: Cuerpo prismático en flotación para la predicción de las condiciones de flotación estable.

$$\bar{x} V = \bar{x}_0 V_0 + \bar{x}_1 V_g - \bar{x}_2 V_p ; \bar{x}_0 = 0$$

$$\bar{x} V = \int_{V_g} x dV_g - \int_{V_p} x dV_p$$

donde el signo menos para el volumen perdido, tiene que ver con tomar los volúmenes como cantidades positivas. Asimismo, $\bar{x} = \overline{CC'}$ cómo puede verse el triángulo MCC' .

$$dV_g = dx x L tg\alpha, dA_{Fg} = L dx ; dV_p = - dx x L tg\alpha, dA_{Fp} = L dx$$

Siendo A_{Fg} la porción de área de flotación del prisma correspondiente al volumen ganado, definida por su intersección con el plano del nivel del líquido. Del mismo modo, A_{Fp} la porción de área de flotación correspondiente al volumen perdido. El signo menos en dV_p se coloca para que éste sea positivo, ya que x es negativa en el espacio ocupado por V_p . Luego,

$$\bar{x} V = tg \alpha \int_{A_{Fg}} x^2 dA_{Fg} - tg \alpha \int_{A_{Fp}} (-x^2) dA_{Fp}$$

$$\overline{CM} tg \alpha V = tg \alpha \int_{A_F} x^2 dA_F; \overline{CM} = \frac{I_{yy}}{V}$$

La integral del segundo miembro es el momento de inercia de segundo orden I_{yy} respecto al eje y del área de flotación. Por último,

$$\overline{CM} = \overline{CG} + \overline{GM} \Rightarrow \overline{GM} = \frac{I_{yy}}{V} - \overline{CG} > 0 \quad (5.28)$$

El punto M se denomina "metacentro" y el segmento GM , altura metacéntrica. Ésta, de ser positiva, asegura la aparición de un torque restaurador que devuelve el objeto flotante a su posición vertical inicial. Ello sería posible asegurando un elevado momento de inercia del área de flotación, o bajando lo más posible el centro de gravedad del objeto completo de modo de reducir al máximo el segmento CG . Por el contrario, una altura metacéntrica negativa, se daría cuando el metacentro se ubique entre el punto G y el C , situación en que una nave volcaría ante un movimiento de ladeo.

Queda claro que el área de flotación rectangular es quizás la más apropiada debido a su elevado momento de inercia respecto al eje x , lo que asegura la estabilidad ante cabeceos de proa-popa. Los buques de carga con forma terminada en quilla, aseguran ser más estables cuando más cargados están: porque bajan su centro de gravedad, porque aumentan su área de flotación y por ende su momento de inercia.

Se dice que el arca de Noe fue sencillamente una caja destinada a flotar al garete, una caja como la que hemos estudiado en cuanto a sus características de estabilidad a la flotación. En la Biblia, en el capítulo 6 versículo 15 del Génesis, se dan las dimensiones que debía tener el arca: 150 (m) de largo, 30 (m) de ancho y 15(m) de altura.

5.6 Movimiento de un fluido como un cuerpo rígido

Existen movimientos de fluidos para los cuales la posición relativa de las partículas no cambia a pesar que en conjunto se encuentran en movimiento. Es decir, no existen tensiones de corte actuando en el seno del fluido que provoquen distorsiones angulares o rotaciones. El fluido se mueve entonces como un cuerpo rígido.

Hay dos casos que tienen importancia práctica dado que al adquirir el fluido un movimiento como cuerpo rígido, toma una forma distinta a la que tiene en reposo pudiéndose producir derrames. Estos son los casos de recipientes acelerados linealmente con aceleración constante, cuya importancia se da en el diseño de recipientes que transportarán líquidos, y los recipientes cilíndricos que giran con velocidad angular constante, cuya aplicación la tienen en el diseño de mezcladores y centrifugadoras en general, entre otros casos.

La razón para estudiar estos fenómenos dinámicos en el capítulo destinado a hidrostática, es que también pueden pensarse como casos hidrostáticos dados en una gravedad equivalente. La ecuación (5.12) que establece el equilibrio de fuerzas de contacto y de volumen, deberá mudar ahora a una forma en la que se contemple el desequilibrio que debe haber para que exista un movimiento acelerado. La ecuación (4.3), en este caso y para el volumen fijo, es:

$$\int_V \rho \frac{Dv}{Dt} dV = \int_V \rho \underline{g} dV + \int_A -\underline{n} p dA \Rightarrow 0 = \int_V (-\rho \underline{a} + \rho \underline{g} - \nabla p) dV$$

$$\rho \underline{g} - \nabla p = \rho \underline{a}$$
(5.29)

La (5.29) (ver ítem 7.2) no es otra que la segunda ley de Newton expresada punto a punto de un fluido, donde las magnitudes de fuerzas de volumen, de contacto e inerciales están dadas por unidad de volumen. Según sea \underline{a} en la (5.29), será la distribución de presiones en un fluido en movimiento como cuerpo rígido.

5.6.1 Recipientes acelerados linealmente con aceleración constante

Este es el caso en el cual \underline{a} es constante, con lo cual la expresión (5.29) puede escribirse de una forma análoga a la (5.12) de modo que refleje un caso hidrostático dado por una gravedad efectiva igual a $(\underline{g} - \underline{a})$:

$$\nabla p = \rho (\underline{g} - \underline{a})$$
(5.30)

Supongamos el caso más frecuente en que \underline{g} y \underline{a} sean perpendiculares. El despliegue de la (5.30) en sus tres componentes escalares para un sistema coordenado donde un eje coincida con \underline{g} y otro con \underline{a} -como indica la figura 5.13- será:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$
(5.31)

Luego, el diferencial total de la presión será:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho a dx - \rho g dz$$
(5.32)

Integrando miembro a miembro entre dos puntos, donde en uno de ellos sea conocida la presión –supongamos la ambiental- y además sea el origen de coordenadas, tendremos:

$$p = p_0 - \rho a x - \rho g z \tag{5.33}$$

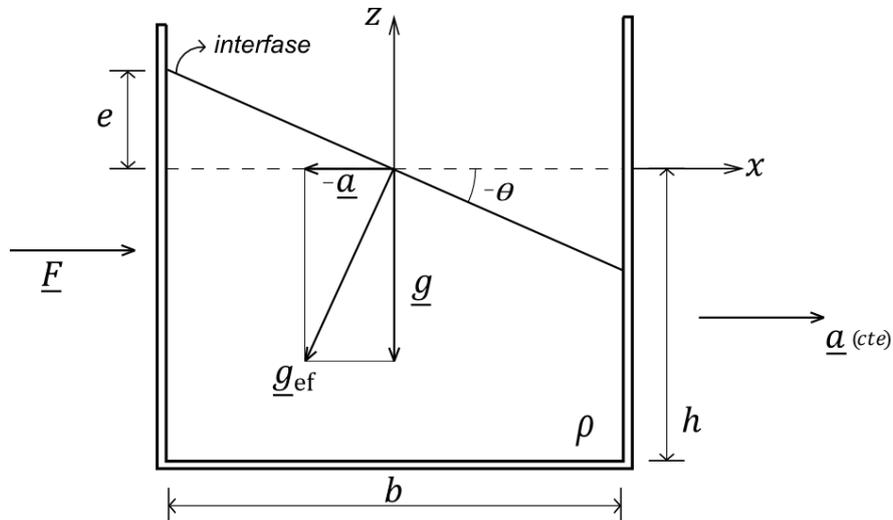


Figura 5.13: Recipiente acelerado linealmente con aceleración constante. El líquido se mueve como si fuera un cuerpo rígido. Las superficies de presión constante son perpendiculares a la gravedad efectiva.

La (5.33) constituye la ecuación de un plano oblicuo en el sistema coordenado de la figura 5.13, cuya inclinación está dada por la pendiente $(-a/g)$. Por lo tanto, cuando el recipiente inicialmente en reposo se acelera linealmente, los planos horizontales de presión constante se inclinan el ángulo $(-\theta)$ cuya tangente es función de dicha aceleración lineal ⁴. Como consecuencia, el fluido asciende en uno de los extremos del recipiente, en valores absolutos, una cantidad:

$$e = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \theta \tag{5.34}$$

Dicho ascenso debe ser tenido en cuenta cuando se diseñen recipientes –sobre todo abiertos- para evitar el derrame cuando que lleven fluidos y sean acelerados. Debemos destacar que este fenómeno ocurrirá tanto en los arranques como en las detenciones de vehículos de carga.

Recipientes con fluido en caída libre: un caso especial

Cuando un recipiente con fluido se encuentra en caída libre, la aceleración lineal constante a la que se halla sometido es también la gravitacional. Luego, la expresión (5.30) queda como:

$$\nabla p = 0 \Rightarrow p = \text{constante}$$

⁴ Una experiencia de este fenómeno producida por el autor puede ver se en el siguiente enlace: https://drive.google.com/file/d/18sSODdAmGjdgmgwYIJ9-caLImix15z0/view?usp=drive_link

En los movimientos de caída libre no existe la fuerza normal que la base del recipiente transmite al fluido para equilibrar el peso del mismo. En consecuencia, el efecto de la gravedad en reposo no aparece en caída libre: físicamente "son estados equivalentes al de ingravidez", por eso la presión se mantiene constante, como lo haría en un recipiente en reposo en un espacio sin gravedad.

5.6.2 Recipientes cilíndricos que giran con velocidad angular constante

En este fenómeno, si bien las velocidades lineales de giro dependen de la posición de cada partícula respecto al centro del recipiente, no hay movimiento relativo porque todas las partículas que se hallan en un mismo radio y a una dada altura, conservan su posición en términos de las aceleraciones gravitacional y centrípeta a las que están sometidas ⁵. La figura 5.14 muestra el esquema básico donde se indican las aceleraciones en un punto genérico.

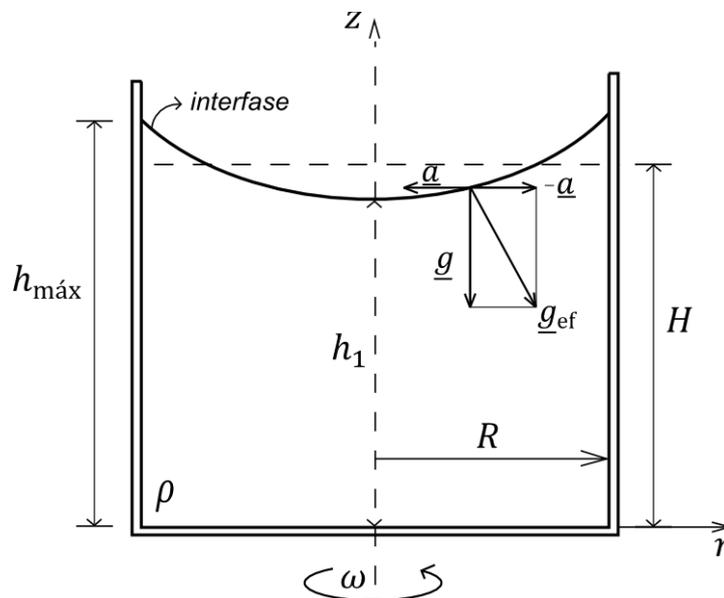


Figura 5.14: Recipiente con líquido girando con velocidad angular constante. El líquido se mueve como un cuerpo rígido. Las superficies de presión constante son paraboloides de revolución.

Del desarrollo de la (5.30) en coordenadas cilíndricas, surge que:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r; \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (5.35)$$

Planteamos el diferencial total y su integración, similarmente a lo realizado en el ítem 5.6.1. Tomando el vértice de la interface curva (en $(0, h_1)$) como punto de presión conocida, tendremos:

⁵ Una experiencia de este fenómeno producida por el autor puede ver se en el siguiente enlace: https://drive.google.com/file/d/1RFSpWrzzU40WeHSHL31bN_4PoU1DVxBq/view?usp=drive_link

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \omega^2 dr - \rho g dz \quad (5.36)$$

$$p = p_0 + \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + \rho g (h_1 - z) \quad (5.37)$$

En el sistema coordenado cilíndrico de la figura 5.14, la expresión (5.37) representa superficies parabólicas de revolución (paraboloides) donde la presión es constante. Se ve que la presión crece con la profundidad y también con el radio porque a mayor radio, mayor es la velocidad tangencial y por ende mayor la aceleración centrípeta necesaria para mantener rotando a la partícula. Ello sólo es posible gracias a que las componentes de la presión en la dirección radial son crecientes alejándose del centro del recipiente.

La altura máxima de líquido en el recipiente para evaluar un eventual derrame, puede obtenerse de la ecuación del paraboloides que da la forma a la interfase, esto es:

$$0 = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + \rho g (h_1 - z) \quad (5.38)$$

Si $r = R$, resulta que $z = h_{m\acute{a}x}$ (observar que es independiente de ρ):

$$h_{m\acute{a}x} = h_1 + \omega^2 \frac{R^2}{2g} \quad (5.39)$$

Para saber además cuál será la altura del fluido en condiciones de reposo, debemos comparar los volúmenes de fluido en ambos casos. Para el fluido en movimiento de revolución como cuerpo rígido, el volumen será el que quede por debajo de la interfase, luego integrando dicha superficie en el área circular del recipiente, se tiene:

$$Vol = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(h_1 + \omega^2 \frac{r^2}{2g} \right) r dr d\theta = \pi R^2 \left(h_1 + \omega^2 \frac{R^2}{4g} \right)$$

Asimismo:

$$Vol = \pi R^2 H \Rightarrow H = \left(h_1 + \omega^2 \frac{R^2}{4g} \right)$$

de donde, teniendo en cuenta la (5.39), la altura del fluido en reposo respecto a la altura máxima desarrollada cuando está girando, es:

$$H = \left(h_{m\acute{a}x} - \omega^2 \frac{R^2}{4g} \right) \quad (5.40)$$

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) Un recipiente con fluido en reposo, ¿ocupa un espacio que es un volumen material?
- 2) ¿Qué significa que la presión en un punto de un fluido en reposo es isotrópica?
- 3) ¿Cuál es el sustento matemático del hecho físico de que la presión hidrostática es constante en planos horizontales?
- 4) Suponga un tanque con líquido en reposo. Luego suponga que ese tanque se cierra herméticamente dejando una cámara de aire que se presuriza a una presión varias veces superior a la atmosférica. El incremento de presión, ¿se traslada a todos los puntos del líquido en reposo?
- 5) ¿Podría construirse un barómetro utilizando agua? ¿Qué ventajas o desventajas tendría?
- 6) ¿Por qué los manómetros en base a columnas de líquido no son prácticos para medir presiones manométricas mayores al equivalente a una atmósfera?
- 7) ¿Por qué razón los manómetros de las estaciones de servicio o gomerías, no están basados en medición por altura de columna de mercurio?
- 8) Las fuerzas ejercidas por fluidos en condiciones estáticas sobre superficies planas o curvas, ¿tienen componentes tangenciales?
- 9) ¿Qué condiciones deben cumplirse para que un cuerpo sumergido reciba un empuje? ¿El empuje, puede ser nulo o dirigirse hacia abajo?
- 10) ¿Qué condición debe cumplirse para que haya estabilidad de flotación en un cuerpo?
- 11) ¿Por qué la forma de quilla de los buques hace que estos sean más estables cuanto más cargados están?
- 12) Pruebe que un recipiente acelerado linealmente con aceleración constante, es un caso hidrostático sujeto a una gravedad equivalente.
- 13) ¿Por qué la caída libre de un recipiente con fluido estático, es análoga a una situación de ingravidez?
- 14) En un recipiente con fluido girando como cuerpo rígido, las superficies de presión constante no son planas. ¿Por qué?

Página intencionalmente en blanco.

CAPITULO

6

Balance Macroscópico de Masa

6.1 Introducción

Como hemos dicho en el capítulo 2, las leyes de la Física y la Mecánica en particular, todas tienen una misma estructura: el cambio total respecto al tiempo de una determinada magnitud es igual a la sumatoria de las causas de ese cambio.

De nuestras conocidas leyes de Física Mecánica, podemos citar la segunda ley de Newton, tanto para la traslación como para la rotación y el teorema del trabajo y la energía. En el primer caso las magnitudes que cambian son la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular respectivamente. Dicho cambio está referido al tiempo y corresponde a un cuerpo de masa constante porque siempre lo conforman las mismas partículas. Análogamente, el teorema del trabajo y la energía establece un cambio de energía mecánica en un cuerpo de masa constante (también llamado sistema cerrado en Termodinámica), cuando se ejerce sobre él un trabajo neto.

En Mecánica de los Medios Continuos (particularmente Mecánica de los Fluidos) los cuerpos son deformables, ocupando formas, tamaños y posiciones cambiantes con el tiempo. La aplicación de las leyes de la Mecánica a este tipo de cuerpos, implica su seguimiento a lo largo del espacio y el tiempo en que sus magnitudes físicas cambian. Si el medio continuo es un fluido, el seguimiento de

un cuerpo, es decir de una colección constante de partículas, es dificultosa y en la mayoría de los casos poco útil.

Usualmente, se requiere el conocimiento del cambio de las variables de un flujo o de aquellas interacciones que lo modifican, en un cierto entorno o espacio en el cual la colección de partículas que lo ocupa no es la misma en cada instante (sistemas abiertos para la Termodinámica). Recipientes donde varía el fluido contenido en términos de flujos entrantes y salientes, fuerzas interactivas locales entre flujos y los canales que los confinan, y trabajo de bombeo en redes de cañerías, son ejemplos de fenómenos que requieren ser analizados con formulaciones de las leyes físicas que puedan ser aplicadas en un espacio de análisis que no tenga por qué ser un sistema cerrado.

Luego, se requiere una formulación denominada de volumen de control, donde éste sea un espacio convenientemente elegido para el análisis. Los volúmenes de control pueden ser fijos o móviles, pudiéndose mover arbitrariamente y por ende cambiando su forma y su tamaño. Particularmente, los volúmenes de control que se mueven a la velocidad del medio, no permiten que partículas nuevas entren o salgan del mismo siendo, por lo tanto, volúmenes materiales (ver Capítulo 4).

Dado que las expresiones de las leyes que elaboraremos para la Mecánica del Continuo requieren variaciones respecto al tiempo, vamos a desarrollar una herramienta matemática denominada "teorema del transporte" que nos permitirá cuantificar las variaciones respecto al tiempo de una determinada magnitud de campo observadas desde un volumen de control arbitrariamente elegido. Dichas variaciones se expresarán en términos del volumen, de las áreas que lo rodean, de la velocidad de estas áreas y las variaciones locales de la magnitud. En resumen: en términos de cambios que se producen en el volumen y flujos que se producen a través de las superficies que lo rodean.

El teorema del transporte permitirá, desde las formulaciones de las leyes para cuerpos de masa constante, transformarlas a formulaciones para volúmenes de control. En general para volúmenes de control arbitrarios y particularmente, para volúmenes fijos que representan la mayoría de los casos prácticos.

6.2 Teorema del transporte

Consideremos un medio continuo que se mueve con una velocidad \underline{v} , función de las coordenadas y el tiempo, y una magnitud escalar ϕ asociada al flujo como puede ser la energía, una componente de cantidad de movimiento o la masa. Consideremos también un volumen arbitrario $V_a(t)$ -de control-¹, que se mueve a través del medio continuo con una velocidad \underline{w} en sus fronteras, en general distinta a la velocidad del fluido y función de las coordenadas y del tiempo. Dada esta particularidad, habría una velocidad relativa del fluido respecto al volumen de control ($\underline{v}-\underline{w}$) con la cual ingresaría y egresaría masa del mismo como un flujo neto, no solo de masa sino también de todas las magnitudes que de ella depen-

¹ Siempre el volumen de control para el planteamiento de las expresiones macroscópicas de las leyes, será un volumen arbitrariamente elegido. Por ello, decir volumen de control o decir volumen arbitrario es decir lo mismo.

den (cantidad de movimiento y energía, entre otras). Los casos límites de un volumen arbitrario son: aquél en el que $\underline{w}=0$ donde el volumen de control se convierte en fijo, y aquel donde $\underline{w}=\underline{v}$ donde éste se convierte en material. El valor del cambio total respecto al tiempo de la magnitud extensiva Φ , medida en el volumen arbitrario, dependerá –como se ha dicho- de cambios en el volumen y flujos a través de las áreas que lo rodean cuando el volumen arbitrario se mueva y evolucione en forma y tamaño, desde un instante a otro.

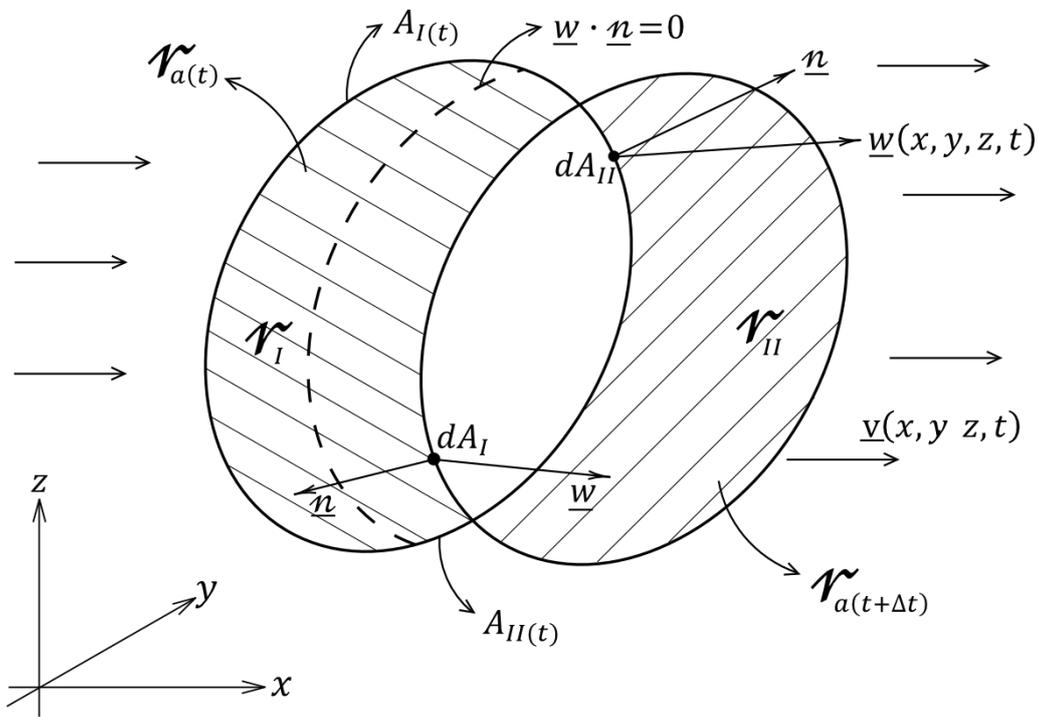


Figura 6.1: Un volumen arbitrario moviéndose en un flujo de fluido para dos tiempos distintos. Para hacer más sencillo el análisis, se supuso el área total compuesta por sólo dos áreas parciales.

La figura 6.1 muestra el medio continuo moviéndose respecto a un marco de referencia inercial y el volumen arbitrario en dos tiempos distanciados un Δt . En el lapso entre ambos tiempos, el volumen arbitrario cambió su posición incorporando volumen y liberando volumen debido al movimiento de sus áreas que, al moverse con velocidad distinta a la del fluido, habrán hecho variar la masa encerrada en el volumen y por ende todas las magnitudes asociadas a ella, incluida Φ .

Dado que la variable Φ es extensiva (su valor es el total dentro del volumen arbitrario), la expresaremos a través de una variable intensiva ϕ –es decir, por unidad de volumen- para tener en cuenta la variación de concentración de Φ . Luego, la variación total respecto al tiempo de Φ , medida en el volumen arbitrario considerado, será:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \phi dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_a(t+\Delta t)} \phi(t + \Delta t) dV - \int_{V_a(t)} \phi(t) dV \right) \tag{6.1}$$

CAPITULO 6: BALANCE MACROSCOPICO DE MASA

En la ecuación (6.1) se ve que no sólo está incrementada la función intensiva sino también los extremos de integración debido a que el volumen también varía con el tiempo. En el instante $(t+\Delta t)$ el volumen puede expresarse como el correspondiente al instante t más el volumen incorporado, menos el volumen liberado, con lo cual implícitamente estamos definiendo al volumen como una magnitud positiva. Es decir:

$$Va(t + \Delta t) = Va(t) + V_{II}(\Delta t) - V_I(\Delta t)$$

Los volúmenes incorporado y liberado están relacionados con el movimiento de las áreas que rodean el volumen arbitrario. Estas pueden dividirse en dos a través de la curva donde se cumple que $\underline{w} \cdot \underline{n} = 0$ (ver figura 6.1). Los puntos sobre dicha curva se mueven perpendicularmente a la dirección de la superficie por lo que no incorporan ni liberan volumen.

$$Aa(t) = A_I(t) + A_{II}(t)$$

La parte del área total llamada I liberará volumen, mientras la parte del área total llamada II lo incorporará. Luego, la expresión (6.1) queda:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \phi dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{Va(t)} \phi(t + \Delta t) dV - \int_{Va(t)} \phi(t) dV \right) + \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_{II}(\Delta t)} \phi(t + \Delta t) dV_{II} - \int_{V_I(\Delta t)} \phi(t + \Delta t) dV_I \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

La ecuación (6.2) requiere ser analizada por partes. El primer sumando del segundo miembro, aprovechando la propiedad de que el límite de una suma-integral en este caso- es igual a la suma de los límites de los sumandos, puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{Va(t)} \phi(t + \Delta t) dV - \int_{Va(t)} \phi(t) dV \right) = \int_{Va(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} \right) dV \\ = \int_{Va(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (6.3)$$

Es decir, de la variación total respecto al tiempo, el término analizado representa las variaciones medidas a coordenadas constantes.

El segundo término del segundo miembro de la (6.2), también merece un análisis particular. Comencemos con la integral extendida al volumen $V_{II}(\Delta t)$. La figura 6.2 muestra un elemento diferencial de área $A_{II}(t)$, que en su movimiento en el tiempo Δt incorpora un volumen diferencial de V_{II} . Ello está relacionado con las direcciones relativas entre el movimiento y la orientación de la porción diferencial de área. Es decir, el área efectiva que incorpora volumen será la proyección sobre el plano perpendicular a la dirección del movimiento o "área transversal" al

movimiento. Para graficar esto pongamos el siguiente ejemplo: mueva Ud. su mano extendida en la dirección perpendicular a sus dedos, su mano incorporará el mayor volumen posible; luego inclínela y muévela en la misma dirección que antes, la mano incorporará menos volumen y, finalmente, muévela en la misma dirección con los dedos orientados en dicha dirección, en ese caso la mano no incorporará volumen. En el primer caso, tanto la dirección del movimiento como la normal a la mano tenían la misma dirección y sentido, en el segundo caso formaban un ángulo y en el tercer caso eran perpendiculares. Dicho de otro modo, el área transversal al movimiento fue máxima, intermedia y cero respectivamente.

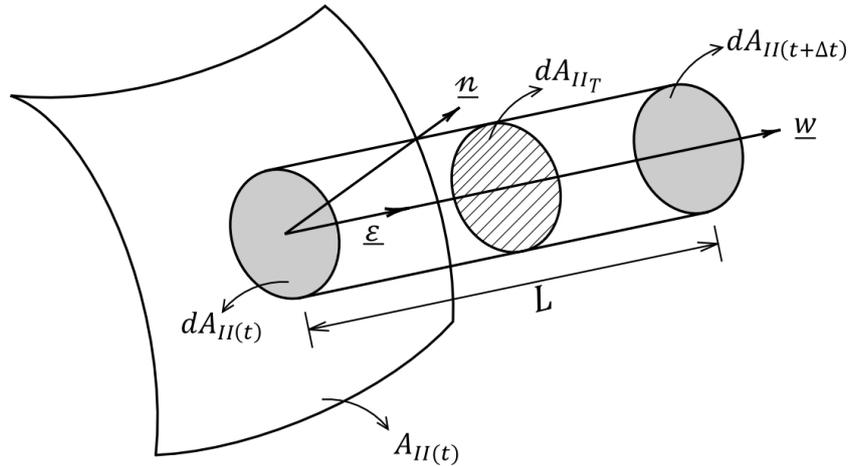


Figura 6.2: Un elemento de área que rodea el volumen arbitrario incorporando volumen en su movimiento durante un lapso de tiempo. Es importante la orientación relativa del área respecto a la dirección del movimiento.

Entonces, el volumen diferencial incorporado por el área diferencial, en general puede escribirse como:

$$dV_{II} = dA_{II_T} L = dA_{II} (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{n}) L = dA_{II} (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{n}) w \Delta t \Rightarrow$$

$$dV_{II} = (\underline{w} \cdot \underline{n}) \Delta t dA_{II} \tag{6.4}$$

En la (6.4) el producto escalar $(\underline{w} \cdot \underline{n}) > 0$ sobre toda el área II y puede demostrarse del mismo modo que el volumen liberado por el área I , en términos diferenciales, está dado por

$$dV_I = -(\underline{w} \cdot \underline{n}) \Delta t dA_I \tag{6.5}$$

Habiendo definido el volumen como una magnitud positiva, en la expresión (6.5) el signo menos compensa el valor negativo que tiene el producto escalar $(\underline{w} \cdot \underline{n})$ en todo punto del área I .

Reemplazando los diferenciales de volumen por las expresiones (6.4) y (6.5) en el segundo término del segundo miembro de la (6.2), tendremos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_{II}(\Delta t)} \phi(t + \Delta t) dV_{II} - \int_{V_I(\Delta t)} \phi(t + \Delta t) dV_I \right) =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{A_{II}(t+\Delta t)} \phi(t + \Delta t) \Delta t (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA_{II} + \int_{A_I(t+\Delta t)} \phi(t + \Delta t) \Delta t (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA_I \right) \quad (6.6)$$

El límite de la expresión (6.6) cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, lleva los valores de los extremos y del integrando a los correspondientes al instante t . Por ello, la (6.6) queda:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_{II}(\Delta t)} \phi(t + \Delta t) dV_{II} - \int_{V_I(\Delta t)} \phi(t + \Delta t) dV_I \right) =$$

$$\int_{A_{II}(t)} \phi(t) (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA_{II} + \int_{A_I(t)} \phi(t) (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA_I = \int_{Aa(t)} \phi(t) (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA \quad (6.7)$$

Rearmando la expresión (6.2) teniendo en consideración las expresiones (6.3) y (6.7), se tiene:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \phi dV = \int_{Va(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{Aa(t)} \phi (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA \quad (6.8)$$

La (6.8) es la expresión general del teorema del transporte que establece que: el cambio total de una magnitud en un espacio arbitrario se debe a cambios en el volumen por variaciones de la magnitud respecto al tiempo a coordenadas constantes, es decir independientemente del movimiento del volumen arbitrario, y cambios debidos al flujo neto de la magnitud hacia o desde el volumen de control debido a que las fronteras se mueven. Si el volumen de control es fijo, los cambios respecto al tiempo sólo serán aquellos que se produzcan en el volumen por dependencia explícita de ϕ respecto al tiempo. Si ϕ no depende del tiempo, pero el volumen de control se mueve, los cambios totales respecto al tiempo se deberán exclusivamente al segundo término de la expresión (6.8).

Si el volumen arbitrario se mueve a la velocidad del medio, el volumen se convierte en material puesto que no puede intercambiar masa por sus fronteras (no hay velocidad relativa de las partículas respecto a las áreas del volumen de control). En ese caso, el teorema del transporte recibe el nombre de "teorema del transporte de Reynolds", donde la derivada total la simbolizamos con la letra "D" debido a que es una derivada tomada sobre una porción constante de partículas. Luego:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{Vm(t)} \phi dV = \int_{Vm(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{Am(t)} \phi (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA \quad (6.9)$$

Cuando la expresión (6.9) es cero, estaremos en presencia de las leyes de conservación. Seguidamente aplicaremos esto a la masa contenida en un volumen material.

6.3 Conservación de masa y ecuación de continuidad

Si la magnitud extensiva Φ es la masa, la magnitud intensiva correspondiente -masa por unidad de volumen- es la densidad. La expresión (6.9) en este caso queda:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{Vm(t)} \rho dV = \int_{Vm(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{Am(t)} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = 0 \quad (6.10)$$

La igualdad a cero tiene que ver con que en un volumen material la masa no puede variar, por lo tanto su derivada total respecto al tiempo es nula. La ecuación (6.10) dice que si la densidad de un medio contenido en un volumen material varía con el tiempo, es decir que el primer término tiene un valor, las fronteras del volumen deberán moverse para que el segundo término tome el mismo valor y de signo contrario para asegurar la igualdad a cero. Por ejemplo, un globo aerostático se infla poco a nivel del mar -sin tensionar la membrana- porque cuando ascienda a alturas importantes, la disminución de la presión atmosférica hará que el gas interior se expanda disminuyendo su densidad, luego la membrana del globo debe moverse hacia afuera para compensar este cambio. Cuando la membrana se haya tensionado totalmente, el globo no podrá seguir ascendiendo porque ya no hay manera de que las fronteras se muevan para compensar disminuciones de densidad del gas interior.

La integral de área de la expresión (6.10) posee la forma admisible por el teorema de Gauss, con lo cual puede transformarse a una integral de volumen,

$$\int_{Vm(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{Vm(t)} \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) dV = \int_{Vm(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) \right] dV = 0 \quad (6.11)$$

Para que la ecuación (6.11) se cumpla para cualquier volumen material y cualquier medio continuo como requiere nuestro análisis genérico, la única posibilidad es que el integrando sea nulo. El integrando igualado a cero se conoce como "ecuación de continuidad", "balance microscópico" o "balance diferencial de masa", valido punto a punto de un medio continuo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (6.12)$$

Aplicando la regla de derivación de un producto al segundo sumando de la (6.12), se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \rho + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (6.13)$$

En el caso que el medio continuo sea incompresible, es decir, de densidad constante, la expresión (6.13) se reduce a

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \quad (6.14)$$

La ecuación (6.14) será muy utilizada por nosotros dado que nos ocuparemos fundamentalmente de flujos incompresibles. Aun tratándose de gases, los flujos libres a velocidades de hasta 1/3 de la velocidad del sonido, interaccionan consigo mismo y con otros cuerpos como si fueran incompresibles. En el caso del aire, esta velocidad límite es de alrededor de 100 [m/s] ya que la velocidad del sonido en condiciones normales de temperatura y altitud (20°C y al nivel del mar), es de 343 [m/s]. Mover gases a velocidades mayores a 100 [m/s] implica generar diferencias de presión que producen cambios apreciables en la densidad. Industrialmente, el aire comprimido se utiliza para múltiples aplicaciones debido a la gran velocidad de la corriente que se produce al descargarse a la atmósfera. Respecto al modelado de flujos de gases a velocidades transónicas o supersónicas (0,8 a 5 veces la velocidad del sonido), se requieren planteos termodinámicos que escapan al alcance de este texto.

En el caso de líquidos, no existen aplicaciones prácticas donde se produzcan flujos a velocidades del orden de los 500 [m/s] debido a las altísimas diferencias de presión necesarias y a las grandes fuerzas interactivas entre flujo y estructuras que ello implica (ver ítems 7.3 y 12.2).

En el caso en que un campo de velocidades posea divergencia cero y la densidad no dependa del tiempo, pero sí del espacio, la satisfacción de la (6.13) demandará que los vectores velocidad y gradiente de densidad sean perpendiculares punto a punto. Un ejemplo sería un flujo atmosférico horizontal, perpendicular al gradiente de densidad del aire.

6.4 Balance macroscópico o integral de masa

Cuando tenemos un volumen en el que la masa contenida en cada instante es distinta debido a un flujo neto a través de las áreas, no estamos en presencia de un volumen material. No podemos hablar de conservación de masa en el volumen sino de un balance entre las variaciones dentro de éste y el flujo neto de ingreso o egreso a través de todas o parte de sus áreas. Un ejemplo muy sencillo sería el de un balde que se vacía por un orificio en su fondo. En general, si el volumen es arbitrario y sus fronteras se mueven con velocidad \underline{w} , debemos utilizar el teorema del transporte en su expresión dada por la ecuación (6.8):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \, dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_{A_a(t)} \rho (\underline{w} \cdot \underline{n}) \, dA \quad (6.15)$$

Podríamos decir que el balance ya se habría encontrado, pero la expresión (6.15) es por cierto incómoda para su utilización. En primer lugar es necesario conocer la densidad y su derivada parcial respecto al tiempo en todo punto del volumen arbitrario, en segundo lugar no aparece la velocidad del fluido y menos aún con relación a la velocidad del volumen arbitrario; el fluido ingresará o egresará en función de su velocidad relativa respecto a las fronteras del volumen arbitrario. Para salvar estas desventajas de la (6.15), prosigamos el análisis integrando la ecuación de continuidad en el volumen arbitrario,

$$\int_{Va(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \right] dV = 0$$

Esto es posible porque la (6.12) se satisface punto a punto de un medio continuo independientemente del problema macroscópico que se analice. Dado que la (6.12) es nula, la integración entre cualesquiera extremos, es también nula. Luego, distribuyamos la integral y pasemos a integral de área la surgida por el segundo término del integrando:

$$\int_{Va(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{Aa(t)} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = 0 \quad (6.16)$$

El primer término de la (6.16) es el mismo que aparece en la (6.15) con lo cual puede ser reemplazado, de modo que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \rho dV &= - \int_{Aa(t)} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA + \int_{Aa(t)} \rho (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA \\ \frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \rho dV + \int_{Aa(t)} \rho [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

La ecuación (6.17) es finalmente la expresión del balance macroscópico de masa donde sólo se requiere conocer la densidad y donde aparece explícitamente la velocidad relativa del fluido respecto al volumen arbitrario. La (6.17) expresa el balance entre la variación de masa contenida en el volumen arbitrario en cada instante (o acumulación), con la masa que está entrando y/o saliendo en forma neta a través de sus áreas. Es decir, el primer término será positivo en tanto los flujos de entrada sean mayores que los de salida y viceversa. Esto último quizás se vea mejor si reescribimos la ecuación (6.17) así:

$$\frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \rho dV = - \int_{Aa(t)} \rho [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA \quad (6.18)$$

El corchete del segundo miembro será negativo para los flujos de entrada, signo que se compensará con el menos de la integral, haciendo que el primer miembro sea positivo, esto es una variación positiva de masa que implica el llenado del

volumen arbitrario. De ser mayores los flujos de salida, el primer miembro será negativo porque el volumen arbitrario se estará vaciando.

Más allá de su complejidad, la (6.18) refleja un hecho que intuitivamente sabemos: un balde se llenará en la misma proporción que la cantidad de masa de agua que entre al mismo desde la canilla. Una razón tan intuitiva que también - por analogía- expresa un hecho financiero: la variación de nuestros ahorros -el primer miembro- es igual pero de signo contrario, al flujo neto de dinero ganado y gastado en un determinado momento -el segundo miembro-.

Finalmente, la (6.17) puede hacerse aún más sencilla si en la integral de área sólo tenemos en cuenta las integraciones sobre las áreas donde ingresa (entrada) o egresa fluido (salida), es decir en aquellas donde el corchete del integrando sea distinto de cero. Hay superficies donde dicho corchete será siempre cero porque el fluido se mueve con la misma velocidad que el volumen de control ($\underline{v}-\underline{w}=0$), estas serán llamadas áreas materiales aun siendo interfaces, el hecho es que no hay flujo a través de ellas. En otras superficies el corchete será cero porque la velocidad relativa es perpendicular al versor normal al área; estas son las superficies sólidas, también áreas materiales impermeables. Luego,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho dV + \int_{A_a eys(t)} \rho [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA = 0 \quad (6.19)$$

La (6.19) es la expresión final del balance macroscópico de masa aplicable a cualquier volumen arbitrario, independientemente de la complejidad de su forma o la manera en que se mueve y deforma. De él obtendremos como resultados valores promediados en las áreas o en el volumen. Los ejemplos que siguen podrían haberse planteado con una metodología o análisis ad-hoc, es decir válidos para esos casos pero no utilizables en la generalidad de problemas que pueden plantearse desde la (6.19).

Vaciado de un recipiente cilíndrico

La figura 6.3 muestra un recipiente cilíndrico de área A_r lleno con fluido inicialmente hasta la altura H . A partir de un instante $t_0=0$, el líquido comienza a salir por un orificio en el fondo del recipiente que posee un área de salida A_s mucho menor que A_r . Podemos predecir el tiempo que demandará el vaciado del recipiente utilizando la expresión (6.19). La figura destaca en trazos el llamado "volumen de control", éste será el espacio donde plantearemos nuestro balance macroscópico de masa, que abarca todas las partículas de fluido que se encuentran en el recipiente en cada instante. Nuestro volumen de control será arbitrario y móvil, dado que se irá reduciendo en virtud del descenso de la interfase.

En todo problema de balance macroscópico de masa, luego de destacarse sobre el esquema el volumen de control donde se planteará el balance, deben indicarse las velocidades de las fronteras del mismo y los versores normales a cada porción de su área total.

6.4 BALANCE MACROSCOPICO O INTEGRAL DE MASA

De todas las áreas que rodean al volumen arbitrario elegido, la única que se mueve es la interfase del fluido con el ambiente. En dicha área la velocidad de movimiento es la misma que la del fluido por lo que no habrá flujo de masa a través de ella, la única área donde habrá flujo es la del orificio de salida, porque las demás son áreas sólidas impermeables. Luego, sabiendo que nuestro fluido es incompresible, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho dV + \int_{A_{a\text{eys}(t)}} \rho [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} + \int_{A_s} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = 0$$

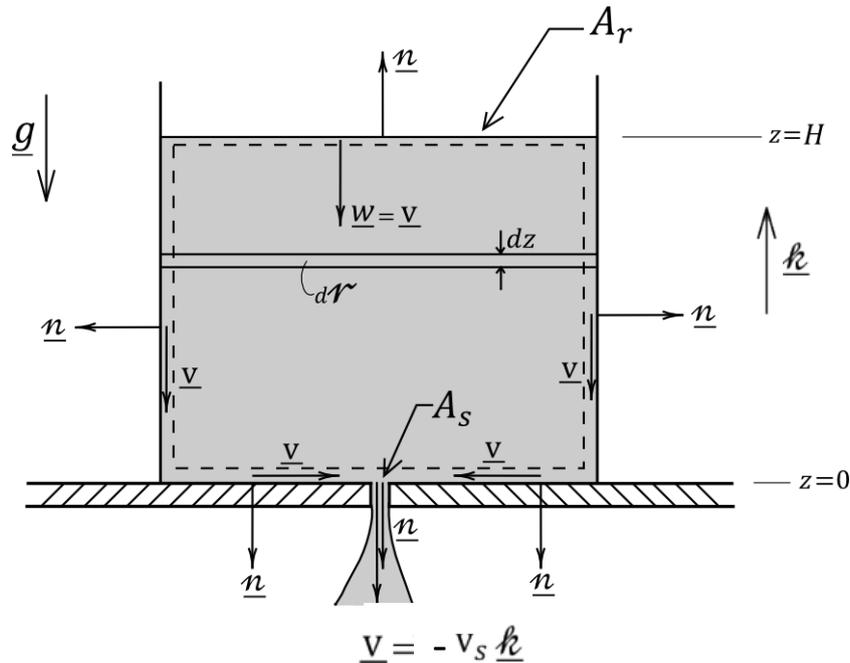


Figura 6.3: Recipiente cilíndrico vaciándose por gravedad.

Si bien podemos recordarlo de nuestros conocimientos de Física Mecánica, aceptaremos que para una altura z del nivel de líquido en el recipiente, la rapidez de salida está dada por:

$$v_s = \sqrt{2gz}$$

Este resultado puede obtenerse planteando la ecuación de Bernoulli entre la superficie de la interfase y la superficie de salida. Tal planteo tiene asidero en el reconocimiento de que la viscosidad del fluido es muy pequeña y por lo tanto despreciable. Dicha restricción hará que el resultado obtenido sea válido para fluidos de muy bajas viscosidades, entre los que se encuentra el agua. Más adelante, en el capítulo 9, profundizaremos sobre esto.

Si suponemos que v_s es constante en el área (dado que la viscosidad es despreciable) y el dV lo proponemos como una rodaja de fluido de área A_r y altura dz , tendremos:

$$\frac{dV}{dt} + \int_{A_s} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = 0 \Rightarrow A_r \frac{dz}{dt} + A_s \sqrt{2gz} = 0$$

La última es una ecuación diferencial de variables separables, de modo que podemos llevar todo lo que corresponde a la variable tiempo de un lado y todo lo que lo que corresponde a la variable z del otro. Luego integrando entre extremos correspondientes, se tiene:

$$-\frac{A_r}{A_s} \frac{dz}{\sqrt{2gz}} = dt \Rightarrow \int_H^0 -\frac{A_r}{A_s} \frac{dz}{\sqrt{2gz}} = \int_0^{t_v} dt$$

Integrando:

$$t_v = \frac{A_r}{A_s} \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Se ve que el tiempo de vaciado aumentará cuanto mayor sea el nivel inicial de líquido y cuanto menor sea el orificio de salida. Esta predicción puede ser muy importante en casos en que deban vaciarse por gravedad grandes tanques de agua con el objeto de realizar limpiezas o reparaciones diversas; en esos casos el tiempo de vaciado puede ser lo suficientemente grande como para planificar otras tareas mientras se produce el desagüe del agua contenida.

Reloj de líquido

El tiempo de vaciado de un recipiente dado, puede ser una unidad de tiempo para mediciones donde esto sea necesario. Parece ridículo hablar en estos términos en épocas en donde los relojes digitales con precisión en la centésima de segundo son de utilización masiva. Pero en épocas no tan benevolentes desde este punto de vista, la medición del tiempo en fracciones pequeñas era toda una tarea. Los egipcios, mucho antes de la era cristiana, usaban como medida del tiempo el vaciado de un recipiente con arena muy fina y muy seca; con estas características la arena se comporta casi como un fluido.

Un vaciado con velocidad constante en la interfase fluido aire, permite dividir la altura del recipiente en divisiones uniformes de modo que entre cada una de ellas los lapsos de tiempo sean los mismos. Para que esto sea posible, el recipiente ha de tener una forma adecuada porque, por ejemplo, en el recipiente cilíndrico estudiado anteriormente, la relación entre el tiempo y la altura de la interfase es cuadrática ($H=f(t^2)$), lo que redundaría en una escala muy espaciada al comienzo y muy apretada al final del vaciado.

La figura 6.4 presenta un recipiente de forma desconocida con un orificio de descarga del fluido contenido. Utilizando el balance macroscópico de masa podemos encontrar la forma de revolución del recipiente con la premisa de que el nivel del fluido descienda con velocidad uniforme. Por las mismas consideraciones que se hicieron para el recipiente cilíndrico, tendremos:

6.4 BALANCE MACROSCOPICO O INTEGRAL DE MASA

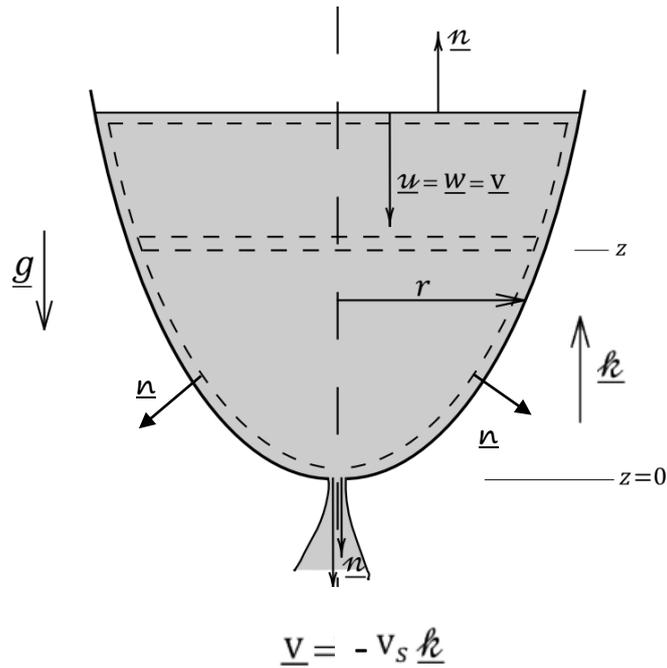


Figura 6.4: Recipiente con forma de sólido de revolución, vaciándose por gravedad con una velocidad de la interfase constante. Esta característica lo hace apropiado para ser utilizado como reloj.

$$\frac{dV}{dt} + \int_{A_s} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = 0$$

Que, para una altura genérica z a la que le corresponde un radio genérico r , quedará:

$$\pi r^2 \frac{dz}{dt} + v_s A_s = 0$$

Como es una premisa del problema que la velocidad con la que desciende el nivel de fluido es constante, se cumplirá que

$$\frac{dz}{dt} = -U, \quad v_s = \sqrt{2gz}$$

Luego,

$$-U \pi r^2 + A_s \sqrt{2gz} = 0 \Rightarrow z = \left(\frac{\pi U}{A_s}\right)^2 \frac{r^4}{2g}$$

La forma del recipiente es un paraboloides de cuarto grado cuya forma dependerá del tamaño del área de salida y de la velocidad elegida para que el nivel de fluido descienda. El tiempo de vaciado determinará la altura del recipiente ($H = U t_v$).

6.5 Balance macroscópico de masa en problemas estacionarios, con fluidos incompresibles y en volúmenes de control fijos

Para un volumen de control fijo donde hay entradas y salidas de un fluido incompresible en estado estacionario, la ecuación (6.19) se reduce a:

$$\int_{A_{eys}} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = 0 \quad (6.20)$$

Es decir, el balance de masa se transforma en un balance de caudales² entrantes y salientes. Si además los flujos son constantes en las áreas y sólo tenemos una entrada y una salida, la (6.20) nos conduce a:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (6.21)$$

Que es la conocida forma de la llamada ecuación macroscópica de continuidad o ley de "velocidad-área", atribuida a Leonardo Da Vinci quién se cree que la descubrió empíricamente y la utilizó ampliamente en el diseño de acueductos (ver figura 3.3). La velocidad varía de forma inversamente proporcional a la variación de la sección de flujo. Nosotros, como parte de un "flujo humano", experimentamos dicha ley cuando ingresamos en las estrechas salidas de los estadios, donde debemos poco menos que correr para balancear el flujo de personas que se suman a los pasillos desde las tribunas.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) ¿De dónde surge la necesidad de utilizar volúmenes arbitrarios para plantear problemas macroscópicos relacionados con flujos de fluidos?
- 2) ¿Cree Ud. que el teorema del transporte (TT) representa la variación total respecto al tiempo de una magnitud en un espacio arbitrario mientras fluye hacia y desde el mismo por sus fronteras?
- 3) En la segunda integral del segundo miembro del TT aparece un producto escalar entre la velocidad local de un elemento de área y su dirección normal, ¿por qué?
- 4) ¿El TT de Reynolds es un caso particular del TT general?
- 5) En un volumen arbitrario, ¿necesariamente deben moverse todas las áreas que lo rodean?
- 6) Establezca un ejemplo donde se verifique la conservación de masa macroscópica y donde se vea que los dos términos interactuantes tengan signo opuesto.

² Caudal de un flujo es la cantidad de volumen que se desplaza en la unidad de tiempo. En Mecánica de los Fluidos el símbolo más frecuentemente usado es "Q", símbolo que aquí se adopta para coincidir con la bibliografía general. En otras disciplinas, por ejemplo en Termodinámica, el caudal se simboliza con \dot{V} .

6.5 BALANCES MACROSCOPICOS DE MASA EN PROBLEMAS ESTACIONARIOS

- 7) ¿Por qué la incompresibilidad de un flujo se establece desde una operación matemática sobre el campo de velocidades?
- 8) ¿Qué importancia tiene la velocidad relativa de un flujo respecto a las áreas que rodean el volumen arbitrario o de control?
- 9) ¿Por qué las integrales de flujo de masa son distintas de cero sólo en las áreas de entrada y de salida de flujo?
- 10) Los flujos de masa entrantes a un volumen arbitrario, operan positivamente o negativamente sobre la acumulación de masa.
- 11) Los flujos de masa salientes de un volumen arbitrario, operan positivamente o negativamente sobre la acumulación de masa.
- 12) ¿Qué implica suponer que la velocidad de salida de un flujo por el orificio de salida de un recipiente, surge de la completa transformación de la energía potencial en energía cinética?
- 13) ¿Qué dificultad tendría la utilización del vaciado de un recipiente cilíndrico como un reloj de agua?
- 14) Defina la magnitud "caudal" y establezca la ecuación de continuidad macroscópica.

Página intencionalmente en blanco.

CAPITULO

7

Balance Macroscópico de Cantidad de Movimiento

7.1 Introducción

Frecuentemente nos interesará conocer la fuerza interactiva entre un fluido y las paredes que lo contienen en una región determinada del flujo. Cuando hablamos de fuerzas, la Física nos remite a las leyes de Newton, particularmente la segunda ley a la que nos hemos referido en el capítulo 4, planteándola en general para un cuerpo continuo y deformable de masa constante, es decir un volumen material. Justamente allí radica la dificultad de emplear la expresión referida cuando nuestro medio continuo es un fluido, porque una porción de masa constante es difícil de seguir a lo largo del flujo para conocer las interacciones que modifican su movimiento en cada lugar del espacio.

Como hemos dicho, generalmente se necesita conocer la fuerza interactiva entre un fluido y las paredes sólidas que lo limitan en lugares particulares donde el flujo sufre cambios en su movimiento, esto es: codos, estrechamientos, ensanchamientos y bifurcaciones, elementos que aparecen en toda instalación de fluidos, incluso en el sistema arterial y venoso del cuerpo humano. Esta es una visión matemáticamente euleriana del problema.

Para transformar la segunda ley de Newton aplicable a un volumen material (ecuación 4.3), en una formulación aplicable a un volumen arbitrario elegido a voluntad, haremos uso de la herramienta matemática elaborada en el capítulo 6, denominada teorema del transporte.

7.2 Balance macroscópico o integral de cantidad de movimiento

Reescribamos la ecuación (4.3) y la expresión del primer miembro en términos del teorema del transporte de Reynolds, es decir, para un volumen material y para la variable intensiva cantidad de movimiento por unidad de volumen $\rho \underline{v}$:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \underline{v} dV &= \int_{V_m(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{A_m(t)} \underline{t}(\underline{n}) dA \\ &= \int_{V_m(t)} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA \end{aligned} \quad (7.1)$$

Por otra parte, dado que aún no hemos modelado la relación de las tensiones de origen viscoso con las velocidades de deformación γ , dado que el balance que queremos desarrollar es aplicable en la mayoría de las situaciones a fluidos de baja viscosidad como el agua, algunos hidrocarburos o el aire, entenderemos que el tensor de tensiones sólo posee componentes normales de compresión, esto es, la presión tal como lo expresa la ecuación (5.9). Cabe destacar que dicha ecuación fue obtenida para un fluido en condiciones estáticas, pero es aplicable también a un fluido en condiciones dinámicas e idealmente sin viscosidad.

Luego, reemplazando la ecuación (5.9) en la (7.1) y transformando a integrales de volumen las integrales de área mediante el uso del teorema de Gauss, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{V_m(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{A_m(t)} -\underline{n} p dA &= \int_{V_m(t)} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA \\ \int_{V_m(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{V_m(t)} -\underline{\nabla} p dV &= \int_{V_m(t)} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \int_{V_m(t)} \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) dV \\ \int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) - \rho \underline{g} + \underline{\nabla} p \right] dV &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Para que la expresión (7.2) sea válida para cualquier volumen material como genéricamente estamos planteando, el integrando debe ser cero, lo que constituye una primera forma del balance diferencial de cantidad de movimiento para fluidos invíscidos:

$$\left[\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) - \rho \underline{g} + \underline{\nabla} p \right] = 0 \quad (7.3)$$

La expresión diferencial (7.3) es nula, por lo que si es integrada entre cualesquiera extremos, la integración también resultará nula. Recordemos que nosotros estamos buscando una expresión integral del principio del momento lineal aplicable a un volumen arbitrario, por ello, integremos la (7.3) en un volumen arbitrario genérico y luego pasemos a integrales de área aquellas que sean susceptibles de aplicar el teorema de Gauss:

$$\int_{Va(t)} \left[\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) - \rho \underline{g} + \nabla p \right] dV = 0$$

$$\int_{Va(t)} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \int_{Aa(t)} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = \int_{Va(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{Aa(t)} -\underline{n} p dA \quad (7.4)$$

Cualquiera de nosotros podría decir que la expresión (7.4) es la formulación del principio del momento lineal aplicable a un volumen material que estamos buscando. Y es así, sólo que su utilización es compleja por dos razones: necesitamos conocer la cantidad de movimiento por unidad de volumen y también su derivada parcial respecto al tiempo, punto a punto en el volumen arbitrario; además, no aparece explícitamente la velocidad de movimiento de las áreas que rodean al volumen arbitrario y mucho menos la velocidad relativa –o efectiva– del fluido respecto a estas áreas, fundamentalmente las de entrada y salida. Es decir, estos son los mismos problemas que ya habíamos tenido para obtener el balance macroscópico de masa en el capítulo 6.

Por otra parte, la variación total respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal de un fluido ocupando un volumen arbitrario, estará dada según la expresión (6.8) del teorema del transporte como:

$$\frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{Va(t)} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \int_{Aa(t)} \rho \underline{v} (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA \quad (7.5)$$

El primer término del segundo miembro de la (7.5) puede despejarse y reemplazarse en la (7.4), tal que

$$\frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \rho \underline{v} dV - \int_{Aa(t)} \rho \underline{v} (\underline{w} \cdot \underline{n}) dA + \int_{Aa(t)} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = \int_{Va(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{Aa(t)} -\underline{n} p dA$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \rho \underline{v} dV + \int_{Aa(t)} \rho \underline{v} [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA = \int_{Va(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{Aa(t)} -\underline{n} p dA \quad (7.6)$$

que es una primer forma mejor aplicable del balance. En la expresión (7.6) ya no se presentan los problemas que se presentaban en la (7.4) porque sólo aparece la variable intensiva del balance y se hace explícita la velocidad relativa del fluido respecto al volumen de control.

Por los mismos argumentos que esgrimimos en el capítulo 6 (ver ítem 6.4), la segunda integral del primer miembro será no nula únicamente en las áreas de entrada y salida, el resto de las áreas son áreas en general materiales, pudiendo ser sólidas o interfases. Del mismo modo, puede desglosarse la integral de la presión en la integral sobre las áreas no sólidas (clásicamente las áreas de entrada y salida de flujo y las interfases) y la integral sobre las áreas materiales

sólidas. Estas últimas representan la fuerza interactiva que el fluido recibe desde las paredes obligándolo a cambiar su movimiento.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \underline{v} dV + \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho \underline{v} [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA = \\ \int_{V_a(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{A_a \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p dA + \int_{A_a \text{ sól}(t)} -\underline{n} p dA \end{aligned} \quad (7.7)$$

La integral de la presión sobre las áreas sólidas podemos decir que es imposible de resolver dado que la distribución de presión en un área sólida es muy compleja y mucho más si la geometría es tridimensional. Imaginemos una manguera enrollada en espiral sobre un piso muy liso; una vez que circule agua por ella, ésta comenzará a desenrollarse hasta quedar recta. Y ello ocurrirá porque la manguera fuerza al líquido a doblar y la reacción de éste endereza la manguera. Esta fuerza interactiva se produce en el interior de la manguera en un área compleja y por una distribución de presión que se desconoce. Por ello, de la (7.7) generalmente obtendremos como resultado el valor total de la integral de la presión en las áreas sólidas, a la que llamaremos "fuerza" (F). Luego:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \underline{v} dV + \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho \underline{v} [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA = \int_{V_a(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{A_a \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p dA + \underline{F} \quad (7.8)$$

La ecuación (7.8) es un "balance de cantidad de movimiento" aplicable a un volumen arbitrario. Es un balance porque vincula la variación total de la cantidad de movimiento del fluido dentro del volumen de control en cada instante, con el flujo neto de cantidad de movimiento a través de las áreas de entrada y salida de flujo, las fuerzas gravitacionales y las fuerzas interactivas del fluido en las áreas del volumen arbitrario, las de entrada y salida por una parte, las materiales no sólidas y con las paredes sólidas que lo contienen.

Del mismo modo que en el caso del balance de masa (ver ecuaciones 6.17 y 6.18), podemos reescribir la (7.8) como:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \underline{v} dV = - \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho \underline{v} [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA + \int_{V_a(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{A_a \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p dA + \underline{F} \quad (7.9)$$

donde se ve que los flujos de cantidad de movimiento –primer término del segundo miembro- actúan como fuerzas, los flujos de entrada –donde el corchete del integrando es negativo- tenderán a aumentar la cantidad de movimiento del fluido dentro del volumen arbitrario, mientras que los flujos de salida harán lo contrario.

Del mismo modo, pueden entenderse las fuerzas sobre un cuerpo como flujos entrantes y salientes de cantidad de movimiento, según como actúen respecto al movimiento del cuerpo. En este sentido, existen opciones didácticas que definen la fuerza como un flujo de cantidad de movimiento.

7.2.1 La expresión de la presión en el balance macroscópico de cantidad de movimiento

En las ecuaciones (7.8) o (7.9) cabe analizar la expresión de la presión en las integrales sobre las áreas materiales sólidas y no sólidas. Conceptualmente la presión se mide en forma absoluta, es decir respecto al vacío, por lo tanto, en las integrales sobre las áreas de entrada y salida de flujo colocaremos la presión absoluta del fluido. Luego, la integral que hemos llamado "fuerza", también resulta de una distribución de presión compleja y desconocida sobre las áreas sólidas. En la mayoría de los problemas prácticos existe una presión ambiental que obra como presión de referencia, de modo que la presión del fluido y la distribución en las paredes sólidas pueden expresarse en términos relativos o manométricos. Así:

$$\int_{Aa \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p \, dA + \int_{Aa \text{ sól}(t)} -\underline{n} p \, dA =$$

$$\int_{Aa \text{ no sól}(t)} -\underline{n} (p_{man} + p_{ref}) \, dA + \int_{Aa \text{ sól}(t)} -\underline{n} (p_{man} + p_{ref}) \, dA \quad (7.10)$$

Distribuyendo las integrales,

$$\int_{Aa \text{ no sól}(t)} -\underline{n} (p_{man} + p_{ref}) \, dA + \int_{Aa \text{ sól}(t)} -\underline{n} (p_{man} + p_{ref}) \, dA =$$

$$\int_{Aa \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p_{man} \, dA + \int_{Aa \text{ sól}(t)} -\underline{n} p_{man} \, dA + \int_{Aa(t)} -\underline{n} p_{ref} \, dA =$$

$$\int_{Aa \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p_{man} \, dA + \underline{F}_{Neta}$$

Es decir, queda únicamente la influencia neta de la presión manométrica en todas las áreas, dado que la presión de referencia –que es constante- integrada en la totalidad de las áreas que rodean el volumen arbitrario, ejerce una fuerza total nula. Es el caso de cualquier objeto que nos rodea –incluso nosotros mismos- que estamos sujetos en toda nuestra área circundante a una presión constante –la atmosférica- que ejerce una fuerza neta nula. Por ello, expresando la presión en términos manométricos en las áreas no sólidas, obtenemos del balance la fuerza neta ejercida por las paredes sólidas. El balance (7.8) puede reescribirse como:

$$\frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \rho \underline{v} \, dV + \int_{Aa \text{ eys}(t)} \rho \underline{v} [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] \, dA$$

$$= \int_{Va(t)} \rho \underline{g} \, dV + \int_{Aa \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p_{man} \, dA + \underline{F}_{Neta} \quad (7.11)$$

En la mayoría de los casos prácticos la presión de referencia es la presión atmosférica (p_0), por lo que las presiones manométricas las expresaremos como p_m de acuerdo a como la hemos definido en la expresión (5.19). Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \underline{v} dV + \int_{Aa\ eys(t)} \rho \underline{v} [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA \\ = \int_{V_a(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{Aa\ no\ sól(t)} -\underline{n} p_m dA + \underline{F}_{Neta} \end{aligned} \quad (7.12)$$

7.3 Fuerza sobre una placa plana fija

Consideremos una placa plana fija de área A , sobre la que impacta un flujo libre de aire en condiciones atmosféricas a una velocidad \underline{U} como indica la figura 7.1. El volumen arbitrario para el análisis en este caso es un volumen fijo ($\underline{w}=0$ en todas las áreas) y, una vez seleccionado, será nuestro volumen de control (espacio en líneas de trazos).

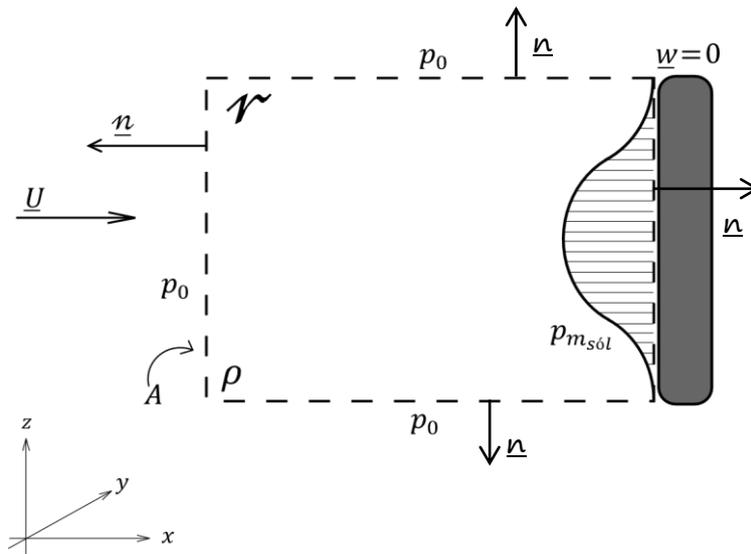


Figura 7.1: Chorro de fluido impactando sobre una superficie plana fija de área A.

Obsérvese que, según el sistema de referencia elegido, el flujo ingresa en la dirección x . Supondremos que después de chocar con la placa fija, el flujo se divide exactamente en dos partes que salen en las direcciones y y $(-y)$, con la misma rapidez U pero por áreas iguales a la mitad de A . Es decir, éste es un problema en dos direcciones que requiere el análisis de la proyección del balance (7.12) sobre los ejes x e y . Multiplicando escalarmente miembro a miembro por los versores \underline{i} y \underline{j} , se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_x dV + \int_{A\ eys} \rho v_x (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = \int_V \rho g_x dV + \int_{A\ no\ sól} -n_x p_m dA + \underline{F}_{Neta\ x}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_y dV + \int_{A_{eys}} \rho v_y (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = \int_V \rho g_y dV + \int_{A_{no\ sól}} -n_y p_m dA + \underline{F}_{Neta\ y}$$

Dado que el problema lo consideramos estacionario y al flujo incompresible, el primer término del primer miembro de ambas proyecciones será nulo, es decir, la cantidad de movimiento del fluido dentro del volumen de control en cada instante, será la misma. También serán nulas las integrales de la componente de la fuerza gravitacional en las direcciones x e y . Las integrales de la presión manométrica del fluido en las áreas no sólidas, si consideramos que el flujo está a la presión atmosférica, también serán nulas. Además, si consideramos constante la velocidad del flujo en las áreas de entrada y salida, considerando que en la dirección x hay sólo un área de entrada y no hay área de salida, se tiene:

$$\begin{aligned} -\rho v_x^2 A + 0 &= \underline{F}_{Neta\ x} \Rightarrow \underline{F}_{Neta\ x} = -\rho U^2 A \\ -\rho v_y^2 A + \rho v_y^2 A &= \underline{F}_{Neta\ y} \Rightarrow \underline{F}_{Neta\ y} = -\rho U^2 \frac{A}{2} + \rho U^2 \frac{A}{2} = 0 \end{aligned}$$

Debemos recordar que las componentes de la fuerza neta que estamos obteniendo, son las componentes de la fuerza que la placa sólida le hace al flujo. Una fuerza neta en la dirección ($-x$) para detener totalmente su movimiento en x , y una fuerza neta nula en la dirección y debido a que el flujo se divide exactamente en dos partes. La fuerza que la placa le hace al flujo es proporcional a la densidad del fluido, al área de impacto y al cuadrado de la velocidad; es decir, que, si el flujo incrementa su velocidad al doble, la fuerza se incrementará cuatro veces.

Está claro que la fuerza que el fluido le hace a la placa será la opuesta a la que hemos determinado, usualmente ésta es la que interesa por lo cual hay que tener cuidado al expresarla a partir de la obtenida desde el balance.

Veamos cuales son las fuerzas implicadas si la placa fija se encuentra inclinada un ángulo θ respecto a la horizontal y posee un área transversal al flujo igual que en el caso anterior (A), como indica la figura 7.2. En esta segunda situación, el flujo incidente se desvía totalmente en la dirección tangente a la placa, por lo que ahora se deberán analizar las componentes x y z del balance. Observemos que el volumen de control es otro, pero también es fijo y las áreas de entrada y salida tienen una magnitud A ; por ello, los flujos de ingreso y de egreso, por conservación de masa, tendrán ambos una rapidez U . Proyectando la (7.12) en la dirección z y haciendo las mismas consideraciones que en el caso previo, se tiene:

$$\begin{aligned} -\rho U^2 A + \rho U^2 (\cos \theta)A &= \underline{F}_{Neta\ x} \Rightarrow \underline{F}_{Neta\ x} = -\rho U^2 A (1 - \cos \theta) \\ \rho U^2 (\sin \theta) A &= -\rho g V + \underline{F}_{Neta\ z} \Rightarrow \underline{F}_{Neta\ z} = \rho U^2 (\sin \theta) A + \rho g V \end{aligned}$$

La fuerza neta que la placa hace sobre el flujo en la dirección positiva de z es la requerida para desviarlo hacia arriba en contra de la gravedad. Comparando las

fuerzas que en la dirección (-x) recibe el flujo en ambos casos, vemos que para la placa inclinada la fuerza es menor en la proporción $(1 - \cos \theta)$.

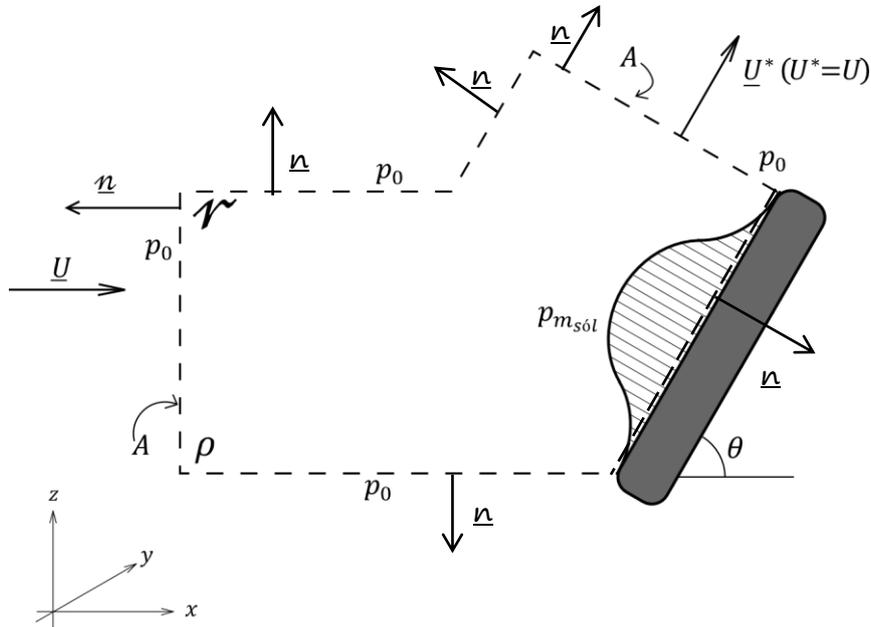


Figura 7.2: Chorro de fluido impactando sobre una placa inclinada de área transversal A.

Este es un hecho muy importante porque este problema, en sus dos versiones, es análogo al de una placa que se mueva con velocidad $(-U)$ en aire calmo. Luego, la fuerza de resistencia al avance –también llamada fuerza de arrastre– de la placa será en ambos casos proporcional al cuadrado de la velocidad, pero, al estar inclinada, dicha resistencia será menor. Luego, la potencia requerida para moverse con rapidez U venciendo una fuerza que depende de U^2 , en ambos casos será:

$$\frac{dW}{dt} = (-U) \cdot F_{Neta\ x} = \rho U^3 A$$

$$\frac{dW}{dt} \Big|_{\theta} = (-U) \cdot F_{Neta\ x} = \rho U^3 A (1 - \cos \theta)$$

Obsérvese que la energía por unidad de tiempo requerida es proporcional al cubo de la velocidad, es decir que, si la velocidad aumenta al doble, la potencia demandada por el movimiento aumenta ocho veces. Si dividimos miembro a miembro las expresiones anteriores, podemos definir una especie de coeficiente aerodinámico ¹ que será más pequeño cuanto más inclinada esté la placa:

$$C_x = (1 - \cos \theta)$$

Si asimilamos la placa al frente de un vehículo, el coeficiente C_x justifica la forma de cuña que poseen los vehículos diseñados para moverse a altas velocidades

¹ Si bien poseen el mismo sentido e interpretación, los coeficientes aerodinámicos, involucrando los efectos del desprendimiento de la capa límite (ver Capítulo 10), se definen como se establece en la referencia [3].

con muy buen rendimiento. Este aspecto y otros relacionados con la propia performance interna de los motores de combustión, compensan el fuerte incremento de demanda energética, y por ende de combustible, que se tiene al pasar de bajas velocidades a altas velocidades ². Por ejemplo, para el caso en estudio, cuando se pasa de 100 [km/h] a 140 [km/h], la demanda de potencia crecería un 174%, incremento que usualmente se encuentra compensado por un conveniente diseño aerodinámico, entre otros factores mecánicos.

Debido a la gran demanda energética para moverse a altas velocidades y a los mayores riesgos que significan posibles accidentes, no hay justificación técnica para viajar a más de 120 [km/h]. Más aún cuando el tiempo ahorrado cada 100 [km] al pasar de 120 a 140 [km/h], es de sólo 7 minutos.

7.4 Forma del balance macroscópico de cantidad de movimiento para volúmenes arbitrarios que se mueven con velocidad constante

Hay una variedad de casos prácticos, fundamentalmente relacionados con álabes de rotores de turbomáquinas, donde el volumen de control puede ser elegido de tal forma que acompañe al álabe moviéndose con una velocidad tangencial –de módulo constante- dada por la velocidad angular del rotor y su posición radial respecto al eje de giro. Instantáneamente, el álabe puede suponerse en movimiento rectilíneo uniforme con una velocidad \underline{w} . Si el fluido posee una velocidad absoluta \underline{v} (ver figura 7.3) es evidente que el efecto neto del flujo estará dado en términos de la velocidad relativa de este respecto al volumen de control, es decir: $\underline{v}_r = \underline{v} - \underline{w}$. Luego, reemplazando la velocidad absoluta del fluido como $(\underline{v}_r + \underline{w})$ en el balance macroscópico de masa (ver ecuación 6.19) y el balance macroscópico de cantidad de movimiento (ecuación 7.12), se tiene:

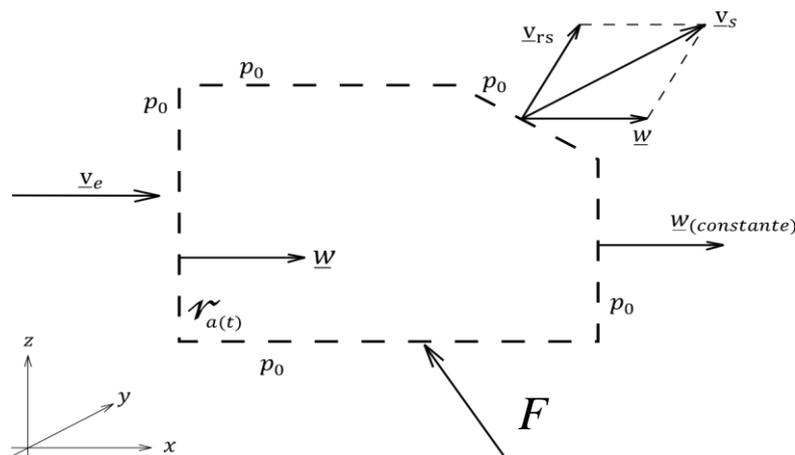


Figura 7.3: Volumen de control genérico moviéndose con velocidad constante (por claridad se han omitido los versores normales a las áreas).

² En el siguiente enlace el lector podrá ver un trabajo del autor donde se aplican estos resultados en un modelo simplificado de tren de alta velocidad. El trabajo fue presentado en el congreso argentino y latinoamericano de ingeniería y de enseñanza de la ingeniería CADI/CLADI CAEDI 2021.

https://drive.google.com/file/d/12mz41_kSIJPxE-riZH2mEnmhe4ADhwOI/view?usp=drive_link

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \, dV + \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho (\underline{v}_r \cdot \underline{n}) \, dA = 0 \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \underline{v}_r \, dV + \underline{w} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \, dV + \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho \underline{v}_r (\underline{v}_r \cdot \underline{n}) \, dA + \\ \underline{w} \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho (\underline{v}_r \cdot \underline{n}) \, dA = \int_{V_a(t)} \rho \underline{g} \, dV + \int_{A_a \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p_m \, dA + \underline{F}_{Neta} \end{aligned} \quad (7.14)$$

El segundo y cuarto término de la ecuación (7.14) suman cero, porque sumados dan como resultado la ecuación (7.13) multiplicada por la constante \underline{w} . Finalmente la expresión (7.13) se reduce a lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho \underline{v}_r \, dV + \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho \underline{v}_r (\underline{v}_r \cdot \underline{n}) \, dA = \int_{V_a(t)} \rho \underline{g} \, dV + \int_{A_a \text{ no sól}(t)} -\underline{n} p_m \, dA + \underline{F}_{Neta} \quad (7.15)$$

La (7.15) es una expresión análoga a la (7.12) donde la velocidad absoluta del fluido se reemplaza por la velocidad relativa respecto al volumen de control. Cabe reiterar que la validez de la ecuación (7.15) se circunscribe a volúmenes de control que se mueven con velocidad constante.

7.5 Propulsión a chorro

Supongamos un cohete propulsándose en el espacio exterior donde la gravedad puede considerarse nula y el medio ambiente un espacio totalmente vacío. La figura 7.4 muestra un esquema del cohete. Supongamos también, por simplicidad, que los materiales de propulsión son expulsados en la misma dirección que el movimiento del cohete, pero en sentido contrario. Respecto a un sistema inercial, los materiales (gases) de propulsión poseen una velocidad absoluta \underline{v} que supondremos constante en el tiempo y en el área de salida, mientras que el cohete posee una velocidad \underline{w} que será una función del tiempo dado que la propulsión irá aumentando la velocidad del cohete hasta tanto existan gases de combustión que puedan ser expulsados. Si la dirección del movimiento es la dirección x , dada la ausencia de fuerzas de volumen y de superficie sobre el volumen arbitrario elegido, el balance (7.12) en dicha dirección queda:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho v_x \, dV + \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho v_x [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] \, dA = 0$$

El primer término es la variación de la cantidad de movimiento del cohete en su conjunto, cuya masa es M y donde todas sus partes se mueven con velocidad \underline{w} , y el segundo término es el flujo de cantidad de movimiento saliente por los gases expulsados, cuyo flujo másico vamos a considerar constante. Luego:

$$\frac{d}{dt} (M w) + v_x|_{salida} \dot{m} = 0 \Rightarrow M \frac{dw}{dt} + w \frac{dM}{dt} + v_x|_{salida} \dot{m} = 0$$

Considerando que la variación de la masa del cohete es el negativo de la masa de gases expulsados en la unidad de tiempo, que hemos asumido como una constante positiva, se tiene:

$$\frac{dM}{dt} = -\dot{m} \Rightarrow M \frac{dw}{dt} + (v_x - w)|_{salida} \dot{m} = 0$$

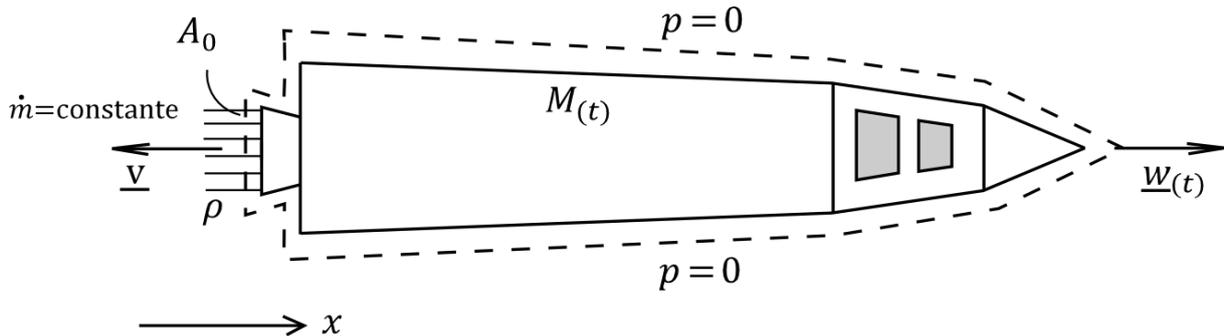


Figura 7.4: Propulsión a chorro de un cohete en el espacio exterior (por claridad se han omitido los versores normales a las áreas).

Hay que tener en cuenta que la rapidez de expulsión de los gases en el sentido contrario al del cohete, es mucho más grande que la rapidez que el cohete experimenta, con lo cual $(v_x - w)$ es un número negativo. Si la masa del cohete disminuye a tasa constante desde una masa inicial M_0 en el tiempo cero, su ley de variación será:

$$M = M_0 - \dot{m} t$$

Aplicando el balance de masa al volumen de control de la figura 7.4, tendremos que

$$\frac{dM}{dt} + \rho [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}]|_{salida} A_0 = 0 : \underline{n} = -\underline{i} \Rightarrow \dot{m} = -\rho (v_x - w)|_{salida} A_0$$

El signo negativo de la última expresión es para hacer positivo el flujo másico de gases, teniendo en cuenta lo dicho anteriormente. Reemplazando y separando variables,

$$M \frac{dw}{dt} - \frac{(\dot{m})^2}{\rho A_0} = 0 \Rightarrow dw = \frac{(\dot{m})^2}{\rho A_0 M} dt = \frac{(\dot{m})^2}{\rho A_0 (M_0 - \dot{m} t)} dt$$

Integrando luego miembro a miembro,

$$w = - \left(\frac{\dot{m}}{\rho A_0} \right) \ln (M_0 - \dot{m} t) + C$$

Si se supone que en el tiempo cero la velocidad del cohete es w_0 , puede valorarse la constante de integración. La expresión final de la velocidad del cohete resultará como:

$$w = \left(\frac{\dot{m}}{\rho A_0} \right) \ln \left(\frac{M_0}{M_0 - \dot{m} t} \right) + w_0 \quad ; \quad 0 \leq t \leq (m_{c+c}/\dot{m}) \quad (7.16)$$

La expresión (7.16) muestra que la velocidad de un cohete en el espacio exterior será monótona creciente desde la velocidad a partir de la cual comenzó la propulsión. Hay que destacar que el tiempo no puede crecer indefinidamente ya que en algún momento se terminarían los productos de la combustión que hace posible la expulsión de los gases. Si la masa total de combustible y comburente es m_{c+c} , el valor máximo que puede tomar el tiempo depende de ésta y la relación constante de expulsión de masa de gases.

7.6 Expresión general para la transformación de ecuaciones válidas para volúmenes materiales, en ecuaciones aplicables a volúmenes arbitrarios

Tanto en el capítulo 6 como en el presente, hablamos de la forma general de las leyes de la Física: la variación total respecto al tiempo de una magnitud, es igual a la suma de causas de dicha variación. En el ámbito de la Mecánica estas expresiones son válidas para cuerpos de masa constante, es decir, que no intercambian masa a través de sus fronteras ocupando un lugar en el espacio al que definimos como volumen material. Luego, planteamos las leyes de la Mecánica de los medios continuos en volúmenes materiales teniendo en consideración la deformación de estos. Generamos una herramienta matemática que desglosa las variaciones totales respecto al tiempo de una magnitud en un volumen arbitrario, en cambios parciales en el volumen y cambios parciales debidos a flujos a través de las áreas que lo rodean. Dicha herramienta la denominamos teorema del transporte y nos ha sido muy útil para obtener las expresiones de lo que hemos llamado "balances", de masa y de cantidad de movimiento.

Muchas otras magnitudes pueden requerir una formulación aplicable a un volumen material, y la forma de llegar a ellas es básicamente la seguida para obtener la ecuación (7.12). Supongamos una magnitud escalar extensiva ϕ cuya magnitud intensiva por unidad de volumen es ϕ . La formulación clásica en un volumen material será la siguiente:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \phi \, dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV + \int_{A_m(t)} \phi (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dA = \int_{V_m(t)} (\$) \, dV + \int_{A_m(t)} \underline{n} \cdot (\#) \, dA \quad (7.17)$$

En la (7.17) las variables $\$$ y $\#$ son variables intensivas definidas por unidad de volumen y de superficie respectivamente. Asimismo, las integrales de área son integrales de flujo que satisfacen los requerimientos de forma del teorema de Gauss, por lo que pueden ser pasadas a integrales de volumen. Luego:

$$\int_{Vm(t)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{v}) - (\$) - \underline{\nabla} \cdot (\#) \right] dV = 0 \tag{7.18}$$

La satisfacción de la (7.18) en cualquier volumen material requiere que el integrando sea nulo, con lo cual podemos integrarlo entre cualesquiera extremos, por ejemplo un volumen arbitrario, es decir:

$$\int_{Va(t)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\phi \underline{v}) - (\$) - \underline{\nabla} \cdot (\#) \right] dV = 0$$

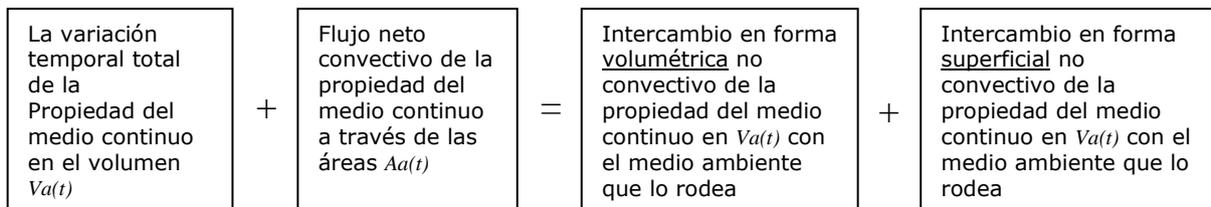
Si distribuimos la integración y aplicamos el teorema de Gauss en el sentido inverso, se tiene:

$$\int_{Va(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{Aa(t)} \phi (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = \int_{Va(t)} (\$) dV + \int_{Aa(t)} \underline{n} \cdot (\#) dA \tag{7.19}$$

Utilizando ahora la expresión (6.8) para reemplazar el primer término del primer miembro de la (7.19) y factorizando, se tiene finalmente

$$\frac{d}{dt} \int_{Va(t)} \phi dV + \int_{Aa\ eys(t)} \phi [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA = \int_{Va(t)} (\$) dV + \int_{Aa(t)} \underline{n} \cdot (\#) dA \tag{7.20}$$

En palabras, este balance general puede establecerse así:



Ciertas propiedades, a su vez, pueden generarse o destruirse por interconversión de otras propiedades dentro del medio. Esto es clásico en problemas donde existen reacciones químicas y, típicamente, ocurre con la energía cuando ésta se genera o se absorbe según las reacciones sean exotérmicas o endotérmicas. Este término denominado usualmente "término fuente", se agrega en el segundo miembro de la expresión y es un término que se expresa como una integral de volumen. No obstante, estos casos no se darán en el transcurso de este texto.

La expresión (7.20), si bien fue obtenida para una magnitud escalar, también es aplicable a magnitudes vectoriales y tensoriales. Por ejemplo, si ϕ se reemplaza por la cantidad de movimiento por unidad de volumen, considerando un fluido invíscido, $(\$)$ será $\rho \underline{g}$ y $(\#)$ será $(-p)$.

Cabe destacar que si ϕ es un escalar, (\$) debe ser un escalar y (#) un vector; pero si ϕ es un vector, (\$) debe ser un vector y (#) un escalar o un tensor de segundo orden.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) ¿Por qué es necesario transformar el principio -macroscópico- del momento lineal a una expresión llamada balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal?
- 2) ¿Qué importancia tiene -para la cantidad de movimiento lineal- la velocidad relativa del flujo respecto a las áreas que rodean el volumen de control?
- 3) ¿Por qué se divide la integral de la presión en una integral extendida a las áreas no sólidas y otra integral extendida a las áreas sólidas?
- 4) ¿Qué cosa es la integral de la presión extendida a las áreas sólidas?
- 5) ¿Puede entenderse a los flujos de entrada y salida de cantidad de movimiento como fuerzas?
- 6) Obtenga el flujo de cantidad de movimiento de un flujo que atraviesa una sección recta de un tubo de radio R , con una distribución de velocidades parabólica del tipo $V(r) = V_{m\acute{a}x} [1-(r/R)^2]$. ¿Qué factor de corrección debería usarse si el cálculo se hiciese con la velocidad media del flujo?
- 7) ¿Por qué la expresión de la presión en términos manométricos permite obtener la fuerza interactiva neta de las paredes sólidas sobre el flujo?
- 8) Se sabe que las formas de cuña benefician la travesía de cuerpos en el seno de fluidos. ¿Cómo se confirma este hecho experimental desde el modelo analítico de la Mecánica de los Fluidos?
- 9) ¿Para minimizar la fuerza interactiva entre un flujo unidimensional y un objeto, en el volumen de control, conviene que exista sólo flujo de entrada, de salida o ambos con el mismo sentido de movimiento?
- 10) Considere una placa curva que desvía un ángulo θ a un flujo impactante sobre ella. ¿Para qué valor del ángulo será máxima la fuerza de interacción?
- 11) ¿En qué casos puede expresarse el balance macroscópico de cantidad de movimiento en términos de la velocidad relativa del flujo respecto al volumen de control?
- 12) En la propulsión a chorro, ¿cuál es la causa de la aceleración del objeto propulsado?
- 13) De la expresión general de los balances macroscópicos, ¿Qué son o cuánto valen ϕ , \$ y # para el balance macroscópico de masa y el balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal, respectivamente?

CAPITULO

8

Balance Microscópico de Cantidad de Movimiento

8.1 Introducción

En este momento de nuestros estudios haremos un paréntesis en la presentación de los balances macroscópicos para abocarnos a un balance microscópico o diferencial, es decir válido punto a punto. A pesar de que aún nos falta el abordaje del balance macroscópico de energía mecánica, haremos este paréntesis a los fines de ganar coherencia temática.

Este capítulo será dedicado al balance microscópico de cantidad de movimiento, un balance que deberá satisfacerse en cada punto de un medio continuo y cuya solución –a diferencia del balance macroscópico- nos dará como resultado una función. Así es, mientras los balances macroscópicos -en general- nos dan resultados numéricos promediados en volúmenes y áreas, los balances microscópicos nos dan funciones. La más destacada de estas funciones será el campo de velocidades que obtendremos cuando resolvamos las ecuaciones diferenciales del movimiento de distintos flujos. A partir de allí podremos obtener otras variables de flujo relacionadas directamente con dicha variable de campo.

El abordaje del tema se hará para el espacio y el tiempo, obteniendo las ecuaciones completas de la dinámica desde las correspondientes a un medio continuo cualquiera hasta las correspondientes a los fluidos newtonianos, sólo para los cuales podremos resolver analíticamente algunos planteos teóricos.

8.2 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento

Comencemos nuestro trabajo analítico planteando nuevamente el principio del momento lineal, es decir la ecuación (7.1), en la que se halla desplegado el primer miembro mediante el teorema del transporte de Reynolds:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho \underline{v} dV &= \int_{V_m(t)} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA \\ &= \int_{V_m(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{A_m(t)} \underline{t}(\underline{n}) dA \end{aligned}$$

Dicha ecuación está planteada en un volumen material genérico. El vector de tensiones –según lo hemos estudiado en el capítulo 4- puede escribirse en términos de la ecuación (4.30), es decir, como la contracción escalar del versor unitario característico de un área y el tensor de tensiones en un punto. Esto es:

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = \int_{V_m(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{A_m(t)} \underline{n} \cdot \underline{T} dA \quad (8.1)$$

Las integrales tomadas sobre las áreas que rodean al volumen material en la ecuación (8.1) pueden ser transformadas en integrales de volumen dado que satisfacen las formas que admite del teorema de Gauss:

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \int_{V_m(t)} \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) dV = \int_{V_m(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{V_m(t)} \underline{\nabla} \cdot \underline{T} dV \quad (8.2)$$

Dado que todas las integrales tienen los mismos extremos, pueden asociarse bajo un único signo integral:

$$\int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) - \rho \underline{g} - \underline{\nabla} \cdot \underline{T} \right] dV = 0 \quad (8.3)$$

Dado que los extremos de integración son genéricos, la satisfacción de la ecuación (8.3) para cualquier volumen material impone la condición de que el integrando deba ser cero. El análisis desemboca en una primera forma del balance microscópico que estamos buscando:

$$\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) - \rho \underline{g} - \underline{\nabla} \cdot \underline{T} = 0 \quad (8.4)$$

Ciertamente, la ecuación (8.4) posee una forma algo compleja que podemos simplificar de modo de obtener la expresión clásica de la segunda ley de Newton: “masa por aceleración, igual a la sumatoria de fuerzas”. Para ello, aplicaremos la derivación de un producto a los dos primeros términos y para el segundo de ellos aplicaremos la siguiente identidad:

$$\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v} \underline{v}) = \rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \underline{v} [\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v})]$$

Identidad que Ud. puede corroborar utilizando las reglas de la notación y álgebra indicial. Luego:

$$\underline{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} + \underline{v} [\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v})] - \rho \underline{g} - \underline{\nabla} \cdot \underline{T} = 0$$

El primer y cuarto sumando, si se factorizan sacando como factor común la velocidad, constituyen la ecuación de continuidad que es idénticamente nula. Factorizando asimismo el segundo y el tercer término, tendremos la densidad multiplicando a la derivada material de la velocidad. Es decir:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \right) = \rho \underline{g} + \underline{\nabla} \cdot \underline{T} \quad (8.5)$$

La expresión (8.5) posee finalmente la conocida forma de la segunda ley de Newton y debe satisfacerse en todo punto de cualquier medio continuo. La (8.5) es válida para cualquier medio continuo dado que en ningún momento se establecieron características de medio alguno: esto es muy importante. En adelante será el momento de aportarlas para estudiar la Mecánica de los Fluidos por un lado y la Mecánica del Sólido por otro. Suponiendo conocidas la densidad y la aceleración de la gravedad, la ecuación (8.5) posee dos incógnitas: el campo de velocidades y el campo tensional, por lo que no puede resolverse ningún problema si no se aportan ecuaciones adicionales que vinculen dichas incógnitas normalizando el sistema. Estas ecuaciones se denominan "constitutivas" porque describen la manera en que un determinado medio se deforma ante las tensiones. En este sentido, en el capítulo 1 nosotros hemos diferenciado un fluido de un sólido atendiendo a las deformaciones que cada uno experimenta cuando son actuados por tensiones tangenciales, y también hemos planteado la primera y más sencilla forma de ecuación constitutiva para un fluido newtoniano en flujo unidireccional (ver ecuación 1.3).

8.3 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento para fluidos

En todo medio fluido existe un campo tensional donde siempre hay una componente de presión, ya sea que el fluido esté en reposo o en movimiento. El campo tensional de presión lo habíamos llamado isotrópico (ver ítem 5.2) porque ésta es idéntica en cualquier dirección que se considere en un punto dado.

Cierto es también, que en un flujo las partículas del fluido están sujetas a tensiones de origen viscoso. Estas se asocian a deformaciones angulares y longitudinales (muy pequeñas en general) tal como se ha visto en el punto 3.4. Por ello, el tensor de tensiones para un fluido puede expresarse como la suma del tensor isotrópico que representa el estado tensional por presión y el tensor de tensiones viscosas. Es decir:

$$\underline{T} = -p \underline{I} + \underline{\tau} \quad (8.6)$$

Donde el tensor de tensiones viscosas está simbolizado por la letra griega τ .

Si reemplazamos la ecuación (8.6) en la (8.5) obtendremos el balance diferencial de cantidad de movimiento válido para cualquier fluido y –lamentablemente– estaremos peor que antes porque hemos agregado a la ecuación (8.5) una incógnita más del flujo, que es la presión. Ya veremos cómo ello será resuelto.

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = \rho \underline{g} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (8.7)$$

Así como la ecuación (8.5) es aplicable a cualquier medio continuo, la (8.7) lo es para cualquier fluido por lo que el paso que sigue es informar a dicha ecuación cual es el fluido del que nos interesa resolver un problema, y eso lo haremos a través de las ecuaciones constitutivas. En este curso sólo estudiaremos la ley constitutiva de Stokes para fluidos de viscosidad constante, ésta es una generalización de ley de viscosidad de Newton presentada el capítulo 1; no obstante, pueden abordarse problemas de flujo no newtoniano desde la ecuación (8.7) haciendo simplificaciones y reemplazando luego la ecuación constitutiva. Las ecuaciones que siguen son la expansión de las componentes de la (8.7) en coordenadas cartesianas y cilíndricas respectivamente.

Coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ , z):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

8.4 Ley de viscosidad de Stokes

En el capítulo 3, particularmente en el punto 3.4, analizamos las velocidades de deformación posibles que un elemento de fluido puede sufrir: velocidades de deformación angulares, velocidades de deformación longitudinales y velocidades de rotación como cuerpo rígido. Las dos primeras están expresadas en la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad y la segunda en la parte antisimétrica de dicho tensor. Debe tenerse en cuenta que en el tensor velocidad de deformación las velocidades de deformación angular aparecen divididas por dos. Dado que las tensiones tangenciales solo producen distorsión angular, es decir, cambios de forma, pero no de tamaño, siguiendo el razonamiento que permitió proponer la ecuación (1.3) se generaliza la misma para un flujo en tres dimensiones como:

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij}, \quad \forall i \neq j \tag{8.8}$$

Las tensiones normales de origen viscoso son aquellas que alargan o acortan un elemento de fluido cuando hay variaciones en las secciones de flujo atendiendo a la conservación de masa, ello ha sido discutido en el apartado 3.4. Discutiremos ahora cual es la relación de proporcionalidad entre dichas tensiones y las velocidades de deformación longitudinal analizando el problema en un sólido elástico lineal y llegando por analogía al caso de un fluido newtoniano.

Remitámonos al ítem 3.4 y a la figura 3.6, allí encontraremos el análisis de las velocidades de deformación lineal de un elemento de fluido debido a tensiones normales de origen viscoso. Por analogía, si el material fuese sólido, las deformaciones normales –extensiones o acortamientos unitarios- se expresarían en términos de los desplazamientos:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Además, para un sólido elástico lineal, estas deformaciones se relacionan con las tensiones normales actuantes a través de las expresiones (4.37-39). Si sumamos miembro a miembro dichas expresiones, tendremos:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1 - 2\nu}{E} [T_{11} + T_{22} + T_{33}] = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

donde la divergencia de \underline{u} es la dilatación cúbica unitaria (ver ecuación 4.43), en la cual juega un rol fundamental el coeficiente de Poisson; si éste es 0,5 el

CAPITULO 8: BALANCE MICROSCOPICO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

material resulta incompresible. Despejando luego la traza del tensor de tensiones, se tiene:

$$[T_{11} + T_{22} + T_{33}] = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = (Tr \underline{T})$$

donde $(Tr \underline{T})$ es la traza del tensor de tensiones o -lo que es lo mismo- su primer invariante.

Por otra parte, la tensión normal T_{11} puede ser despejada de la ecuación (4.37) como:

$$T_{11} = E \varepsilon_{11} + \nu (T_{22} + T_{33}) = E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu (T_{11} + T_{22} + T_{33}) - \nu T_{11}$$

donde se ha sumado y restado el término νT_{11} . Reemplazando luego la traza del tensor de tensiones en función de la divergencia del desplazamiento, de acuerdo a la anteúltima expresión, se tiene:

$$T_{11} (1 + \nu) = E \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

Dividiendo todo por $(1 + \nu)$ y sumando y restando un tercio de $(Tr \underline{T})$:

$$T_{11} = \frac{E}{(1 + \nu)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} - \frac{1}{3} \frac{E}{(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3} \frac{E}{(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

Sumando luego el segundo y tercer término del segundo miembro tenemos:

$$T_{11} = \frac{E}{(1 + \nu)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{3} \frac{E}{(1 + \nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3} \frac{E}{(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.19), el módulo elástico E puede ser expresado en función del módulo elástico al corte G .

$$T_{11} = 2G \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} G \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3} \frac{E}{(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

Y del mismo modo pueden escribirse las otras dos relaciones para las tensiones normales en las direcciones 2 y 3:

$$T_{22} = 2G \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{2}{3} G \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3} \frac{E}{(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

$$T_{33} = 2G \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{2}{3} G \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \frac{1}{3} \frac{E}{(1 - 2\nu)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

Queda claro que en las relaciones entre las tensiones normales y las deformaciones longitudinales, juega un papel ineludible la dilatación.

Si el medio continuo es un fluido, las tensiones normales serán de origen viscoso y se relacionarán con las velocidades de deformación. Por su parte, el módulo

elástico de corte G tiene su análogo en la viscosidad y el módulo elástico E y el coeficiente de Poisson que no pueden definirse para un fluido, quedan relacionados en un parámetro que llamaremos κ . Luego:

$$\tau_{11} = 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) \quad (8.9)$$

$$\tau_{22} = 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) \quad (8.10)$$

$$\tau_{33} = 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) \quad (8.11)$$

donde $\kappa = \frac{1}{3} \frac{E}{(1-2\nu)}$, se denomina viscosidad volumétrica y es otro parámetro material que tiene importancia cuando los efectos derivados de la compresibilidad de los fluidos son esenciales. Esto es, en casos en que la divergencia del campo de velocidades es distinta de cero (ver ecuación 6.12) como en problemas de ondas de choque. Su medición no es sencilla y generalmente indirecta a través de reómetros acústicos.

En las expresiones (8.9-11) se ve claramente que la constante de proporcionalidad entre las tensiones normales de origen viscoso y las deformaciones longitudinales es $2\mu^1$, cosa que permite expresar las ecuaciones (8.8-11) en una única expresión para todo el tensor $\underline{\underline{\tau}}$:

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}\right] \delta_{ij} \quad (8.12)$$

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{d}} + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{v}}\right] \underline{\underline{I}} \quad (8.13)$$

Para líquidos, generalmente los problemas corresponden a flujos incompresibles donde la divergencia del campo de velocidades es nula. Ello permite escribir la relación (8.13) como:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{d}} \quad (8.14)$$

La ecuación (8.14) se denomina ley de viscosidad de Stokes, la cual una vez reemplazada en la (8.7) nos conducirá a la ecuación diferencial de cantidad de movimiento para fluidos newtonianos incompresibles, también denominada ecuación de Navier-Stokes. Debe aclararse que la dependencia de la viscosidad de variables como la temperatura y la presión no altera la validez de la (8.14),

¹ Ver nota al pie en la página 9, Capítulo 1.

ésta será inválida cuando la viscosidad dependa de las tensiones aplicadas o los gradientes de velocidad del flujo (ver ítem 1.5.2.3).

La expresión (8.12) estrictamente tiene la forma dada para coordenadas cartesianas, seguidamente aparecen las relaciones derivadas de la (8.13) para coordenadas cilíndricas:

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

8.5 Ecuación diferencial de cantidad de movimiento para fluidos newtonianos incompresibles

La ecuación que nos disponemos a obtener surge directamente del reemplazo de la ecuación (8.14) en la (8.7), por lo que será válida para flujos newtonianos e incompresibles. Luego, analizando por separado el último término de la (8.7) mediante notación y algebra indicial, se tiene:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} = \underline{\nabla} \cdot \left(2\mu \underline{\underline{d}}\right) = 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \cdot d_{jk} (\underline{e}_j \underline{e}_k)\right] = 2\mu \left(\frac{\partial d_{jk}}{\partial x_i} \delta_{ij} \underline{e}_k\right) = 2\mu \left(\frac{\partial d_{ik}}{\partial x_i} \underline{e}_k\right)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} = 2\mu \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right]\right\} \underline{e}_k$$

Distribuyendo la derivada e intercambiando el orden de derivación en las derivadas cruzadas que surjan –porque estamos trabajando con funciones continuas y derivables–:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau}} = \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right] \underline{e}_k = \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\right] \underline{e}_k$$

8.5 ECUACION DIFERENCIAL PARA FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESIBLES

Es premisa de este desarrollo que la divergencia del campo de velocidad es cero porque estamos trabajando con fluidos incompresibles, por ello, en la última expresión el primer término del corchete es nulo. Luego:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} = \mu \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} \underline{e}_k = \mu \nabla^2 v_k \underline{e}_k = \mu \nabla^2 \underline{v}$$

Con lo cual la ecuación (8.7) nos quedará de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \right) = \rho \underline{g} - \underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{v} \quad (8.15)$$

La (8.15) se denomina ecuación de Navier-Stokes, es vectorial y posee cuatro funciones incógnitas: las tres componentes del campo de velocidades y la presión. Para modelar un determinado problema y que este modelo sea resoluble es necesario plantear una ecuación más que no introduzca nuevas incógnitas, esta es –clásicamente– la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles: divergencia del campo de velocidades igual a cero.

La expresión (8.15) es la forma compacta de la ecuación de Navier-Stokes donde se encuentran muchos términos que seguidamente vamos a expresar para coordenadas cartesianas y cilíndricas, acompañándolas con la expresión de la divergencia del campo de velocidades igualada a cero.

Coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Las ecuaciones anteriores gobiernan los flujos viscosos incompresibles en un espacio tridimensional. El modelado de un flujo particular requerirá la simplificación de las ecuaciones en términos de las características del problema, es decir, muchos términos de las expresiones generales de la ecuación de Navier-Stokes pueden ser idénticamente nulos. La tarea de simplificación reside en determinar cuáles de estos términos son los que no intervendrán en nuestro modelo.

El problema más importante se da cuando subsisten algunos de los términos no lineales del primer miembro, porque si ello ocurre seguramente nuestro modelo no será resoluble analíticamente y habrá que apelar a métodos numéricos de implementación computacional.

Seguidamente veremos dos ejemplos donde se mostrará el procedimiento general de modelado y la solución analítica de la ecuación diferencial obtenida.

8.5.1 Flujo laminar entre placas paralelas

Consideremos el flujo laminar puramente viscoso –no hay aceleración del flujo– de un fluido newtoniano de densidad constante, entre dos placas paralelas separadas una distancia h muy pequeña. Las placas se extienden a lo largo de la dirección x , la placa inferior está fija y la superior se mueve con rapidez V pequeña y constante, a la vez que se considera que el problema es infinito en la dirección transversal al papel (la dirección z). Los requisitos de pequeña separación entre placas y baja rapidez de movimiento de una de ellas son necesarios para asegurar un flujo puramente viscoso. Entre las coordenadas de $x=0$ y $x=L$ se aplica una diferencia de presión y se considerará que el flujo es estacionario. En la figura 8.1 se esquematiza el problema planteado del cual queremos conocer la estructura del campo de velocidades y todo cuanto pueda conocerse a partir de allí por posprocesamiento de resultados.

Físicamente, el flujo se impulsa por la diferencia de presión y por el arrastre de la placa superior. Dado que el fluido se adhiere al sólido tomando la velocidad de éste, el sólido produce un arrastre o efecto de bombeo del fluido. El flujo será unidimensional, es decir, no habrá flujo en la dirección z y tampoco lo habrá en la dirección y debido a que las placas son paralelas. Luego y a priori, podemos asegurar que el campo de flujo es:

8.5 ECUACION DIFERENCIAL PARA FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESIBLES

$$v_x = f(x, y) , v_y = 0 , v_z = 0$$

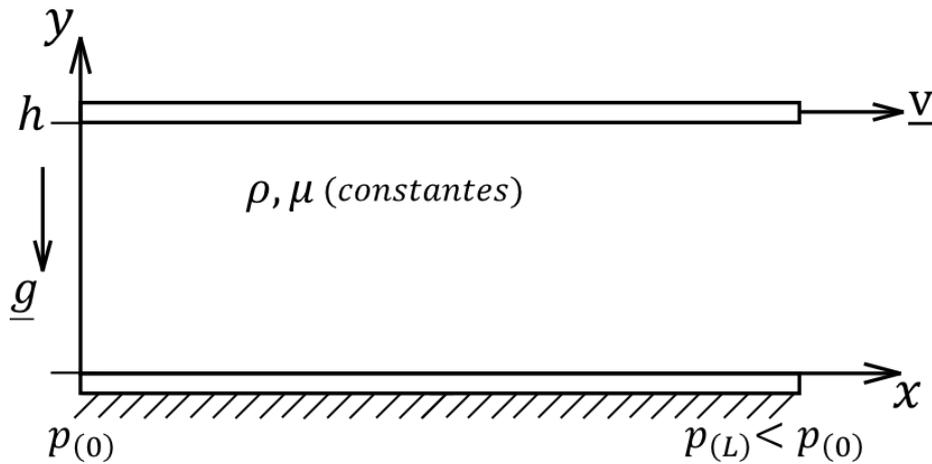


Figura 8.1: Flujo entre dos placas paralelas debido a un gradiente de presión y al arrastre de una de las placas.

La satisfacción de la condición de incompresibilidad puede arrojar luz acerca de la real dependencia de la componente \$x\$ de la velocidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x \neq f(x)$$

El campo de velocidades resulta luego depurado a través de esta ecuación de compatibilidad que es la ecuación de continuidad. Por ello tenemos que:

$$v_x = f(y) , v_y = 0 , v_z = 0$$

Evidentemente, la ecuación diferencial que gobierna el flujo que queremos resolver es un subconjunto dentro de la ecuación (8.15), y podemos extraerla considerando en la expansión de la (8.15) para coordenadas cartesianas, lo siguiente: todas las derivadas temporales serán nulas en virtud del estado estacionario, todos los términos que involucren derivadas de las componentes \$v_y\$ y \$v_z\$ serán nulos porque estas constantes, todos los términos que involucren productos con \$v_y\$ y \$v_z\$ también serán nulos porque éstas son cero y los términos que impliquen derivadas de \$v_x\$ respecto a \$x\$ y a \$z\$ también serán cero.

Luego, de las tres componentes quedan:

$$x: 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

$$y: 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$z: 0 = 0$$

Despreciando la variación hidrostática de la presión en la dirección \$y\$ y debido a la pequeña dimensión de \$h\$, puede asimilarse la presión a una función única de \$x\$ y

a la componente v_x como una función exclusiva de y . Luego, las derivadas de p y de v_x pasan a ser totales:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = K$$

Obsérvese que, en la ecuación diferencial precedente, la única posibilidad de que una función de x sea igual a una función de y es que ambas sean una constante. Asimismo, obsérvese que dicha ecuación diferencial ha sido obtenida poniendo en relieve sólo algunas características del flujo, es decir, no hemos dado información acerca de cómo se mueven las placas. Por ello, la ecuación diferencial obtenida no sólo gobierna el flujo del problema entre manos, sino también otros casos similares que pueden diferir de éste: en el sentido del gradiente de presión o el movimiento relativo de las placas ². La integración de la ecuación diferencial del movimiento nos dará como resultado una familia de funciones $v_x(y)$, entonces, ¿cuál de todas es la que estamos buscando? La que estamos buscando es aquella que cumple con las condiciones de contorno de nuestro problema. Como la variable integrada es la velocidad en x y la ecuación diferencial es de segundo orden, se requieren dos condiciones de borde, es decir, dos valores conocidos de la variable o su derivada primera en puntos extremos del dominio. En nuestro caso esto estará dado por la condición de no deslizamiento tanto en la placa superior como en la inferior:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, & y &= 0 \\ v_x &= V, & y &= h \end{aligned}$$

La integración de la ecuación diferencial y la posterior evaluación de las constantes con las condiciones de contorno, nos permite arribar a la siguiente función para el perfil de velocidades del flujo en análisis:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - h y) + \frac{V}{h} y$$

Es decir: el perfil completo es una suma del perfil que produciría únicamente la impulsión por diferencia de presión, cuya denominación es "flujo Poiseuille", y el perfil que produciría únicamente el arrastre de la placa, cuya denominación es "flujo Coutte". Estos flujos "componentes" y el flujo total están esquematizados en la figura 8.2. Hay que destacar que se ha cumplido con el principio de superposición de efectos, lo cual es sólo posible cuando las ecuaciones gobernantes son lineales, como ha ocurrido en este caso.

Podemos ahora obtener la función presión, cuyo gradiente sabemos que es constante. La integración de la siguiente expresión introduciendo los valores de presión en los extremos del dominio, nos dará:

$$\frac{dp}{dx} = K, \quad x = 0 \rightarrow p = p(0), \quad x = L \rightarrow p = p(L) \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p(L) - p(0)}{L} < 0$$

² En el siguiente enlace, puede verse un artículo del autor (Referencia [17]) relativo a esta discusión:
https://drive.google.com/file/d/1OY1YckILct_LMXYMkGrt6yDKUQtc1xPZ/view?usp=drive_link

8.5 ECUACION DIFERENCIAL PARA FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESIBLES

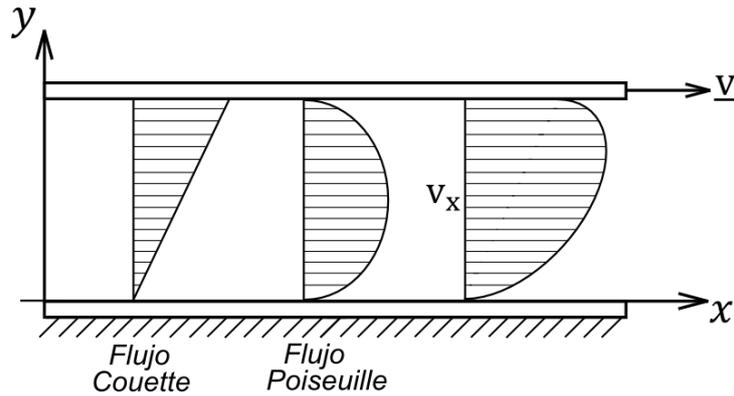


Figura 8.2: Perfil neto de velocidades del flujo entre las placas de la figura 8.1, como superposición del flujo Couette que provoca el arrastre de la placa y el flujo Poiseuille que provoca el gradiente de presión. Al ser lineal la ecuación diferencial gobernante y sus condiciones de contorno, se cumple el principio de superposición.

Posprocesamientos

Poseyendo el perfil de velocidades es posible obtener otras variables de importancia como los esfuerzos cortantes y el caudal circulante entre placas. La ley de viscosidad de Newton o la generalización de Stokes particularizada para una dimensión, establece:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - h) + \mu \frac{V}{h}$$

Dos de los más característicos son los esfuerzos de corte ejercidos por las placas sobre el fluido, es decir, los que actúan en $y = 0$ y $y = h$:

$$\tau_{yx}|_{y=0} = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (-h) + \mu \frac{V}{h}, \quad \tau_{yx}|_{y=h} = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=h} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (h) + \mu \frac{V}{h}$$

Ciertamente, podemos visualizar como actúan estas tensiones en las superficies planas a las alturas seleccionadas, pero para ello debemos conocer si estas tensiones son positivas o negativas. La tensión de corte actuante en la superficie situada en $y = 0$ será siempre positiva porque ya hemos demostrado que el gradiente de presión es menor que cero. El problema surge con la tensión actuante en $y = h$, donde su signo dependerá de la magnitud relativa entre el flujo Poiseuille y el flujo Couette. Para esquematizar dichas tensiones supondremos que ambas son positivas con lo cual estaremos aceptando que el arrastre que impone la placa superior es mayor que la resistencia al avance que la misma placa ejercería sobre el flujo Poiseuille. La figura 8.3-a muestra los esquemas de las tensiones en acuerdo a la convención establecida en el ítem 4.4.1. Obsérvese que los versores normales a ambas superficies salen del fluido "atravesando las placas", siendo positiva la correspondiente a $y = h$ y negativa la otra.

Las preguntas que siguen, son ¿cuánto valen y cómo actúan las tensiones cortantes en las placas sólidas? Ambas respuestas se dan en términos del principio de acción y reacción que demandará que las tensiones en las placas sean

iguales (en intensidad y signo) a las que actúan en el fluido y su dirección sea la opuesta, dado que las superficies de las placas poseen versores normales que van hacia el interior del fluido. Ello está de acuerdo a la convención referida y por supuesto con el hecho físico, los esquemas se muestran en la figura 8.3-b.

Las tensiones en el fluido indican la resistencia al flujo que impone la placa inferior y el arrastre que ejerce la placa superior. En las placas, en cambio, se ve el arrastre que el fluido ejerce sobre la placa fija y la resistencia al movimiento sobre la placa móvil.

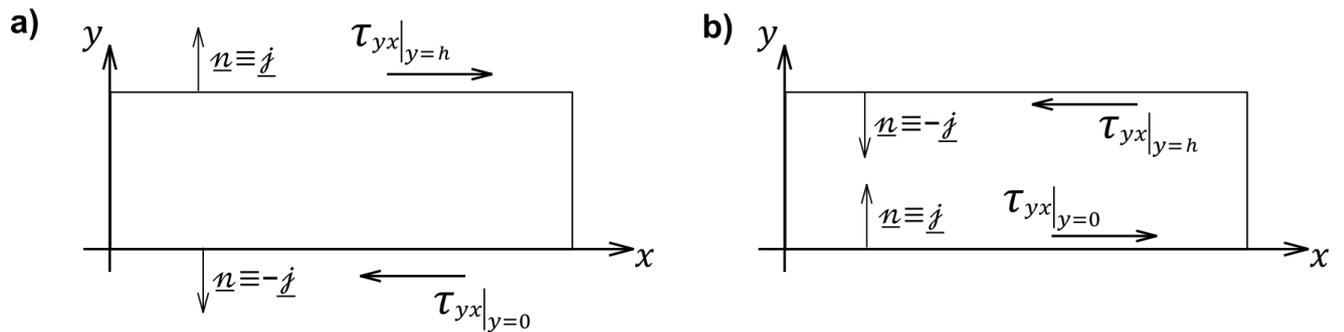


Figura 8.3: a) Tensiones tangenciales actuantes en el fluido en los planos de contacto con las placas paralelas. b) Tensiones tangenciales actuantes en las placas sólidas.

El caudal, es decir el flujo volumétrico de fluido a través de un área, es una variable macroscópica porque representa un flujo promedio; por ello, para su cálculo debemos usar la expresión de flujo másico de la ecuación (6.20) para un volumen de control fijo, evaluada en un área de flujo característica, es decir:

$$Q = \int_A (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA$$

Supondremos un área de altura h y ancho unitario, donde el $dA = dy \cdot 1$ (ver figura 8.4). Si asumimos que el flujo es saliente por el área genérica considerada, la velocidad tendrá la misma dirección que el versor \underline{n} y la integral será positiva. Luego:

$$Q = \int_0^h \left[\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + \frac{V}{h} y \right] dy \cdot 1 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(-\frac{h^3}{6} \right) + \frac{V}{2} h$$

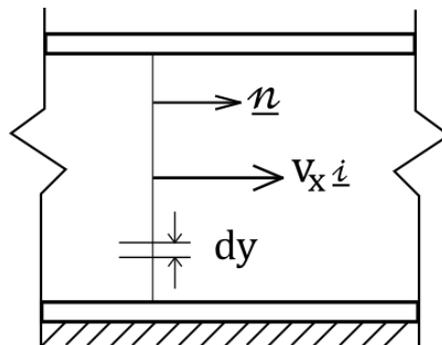


Figura 8.4: Área de flujo característica para el cálculo del caudal.

8.5 ECUACION DIFERENCIAL PARA FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESIBLES

El caudal obtenido es por cierto un número positivo (recordar que el gradiente de presión es negativo) y sus unidades en este caso serán $[m^2/s]$ porque está dado por unidad de ancho en la dirección z . Nuevamente, se ven claramente los aportes del flujo Poiseuille y el flujo Couette que se superponen.

Ecuación de Reynolds

Si nuestro problema fuera el indicado en la figura 8.1 pero la placa superior estuviese levemente inclinada generando un canal convergente, con una pendiente menor a $1/30$, podríamos seguir suponiendo que la componente v_y es nula debido a su pequeño valor (ver figura 8.5). Ello se conoce como "aproximación de lubricación" porque en los contactos lubricados se produce un flujo muy viscoso en un canal convergente o convergente-divergente. Luego, gracias a esta aproximación se puede suponer válida la expresión del caudal obtenida más arriba.

Independientemente del estrechamiento, el caudal será el mismo en cualquier sección, pero ya no el gradiente de presión que será variable punto a punto debido a que es variable la altura h entre placas en cada posición.

Si despejamos el gradiente de presión de la expresión del caudal obtendremos que:

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu \frac{V h(x) - 2Q}{h^3} \quad (8.16)$$

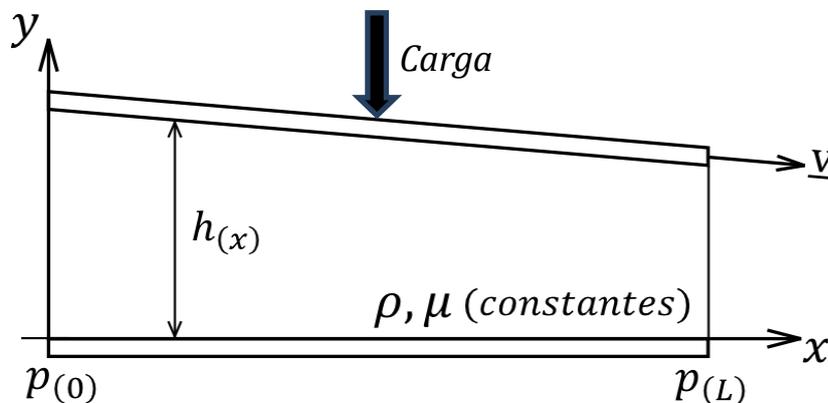


Figura 8.5: Dos placas no paralelas formando un canal levemente convergente. Se considera que localmente el flujo es el que corresponde a dos placas paralelas separadas por la altura h en dicha posición.

La ecuación recibe el nombre de ecuación de Reynolds y ésta es la forma más sencilla en que puede encontrarse. Ella gobierna el incremento de presión que se produce en el fluido lubricante que separa dos superficies en movimiento relativo, soportando la carga que las impele a tocarse y transformando el contacto sólido-sólido en un contacto sólido-líquido. Muchos mecanismos funcionan gracias a ello, desde los cojinetes de máquinas hasta las articulaciones sinoviales de alta movilidad como la rodilla o la cadera. En las referencias [15, 19 y 22] Ud. encontrará desarrollos sobre la teoría de la lubricación y planteo de modelos de articulaciones artificiales de rodilla y cadera.

8.5.2 Flujo laminar en un tubo capilar

Supongamos ahora el flujo lento en estado estacionario de un fluido newtoniano e incompresible, impulsado por una diferencia de presión a través de un tubo de sección circular constante, horizontal y de muy pequeño radio. Estas restricciones asegurarán un flujo puramente viscoso. El problema de obtener el perfil de velocidades y todas las otras variables que a través de ello puedan calcularse, es un problema que conviene resolver en coordenadas cilíndricas. La metodología es la misma que en el caso anterior con lo cual vamos a evitar redundar en aclaraciones.

En primer lugar estableceremos el perfil de velocidades. El esquema de la figura 8.6 sitúa al capilar con su eje coincidente con el eje z , de modo que podemos suponer que la única componente de la velocidad distinta de cero es la v_z . La sección constante impide que la componente v_r tenga un valor distinto de cero y el flujo puramente axial sin rotación también hace que v_θ sea nula.

La satisfacción de la ecuación de continuidad nos permitirá reconocer la dependencia de la componente axial de velocidad respecto a las coordenadas.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z = f(z)$$

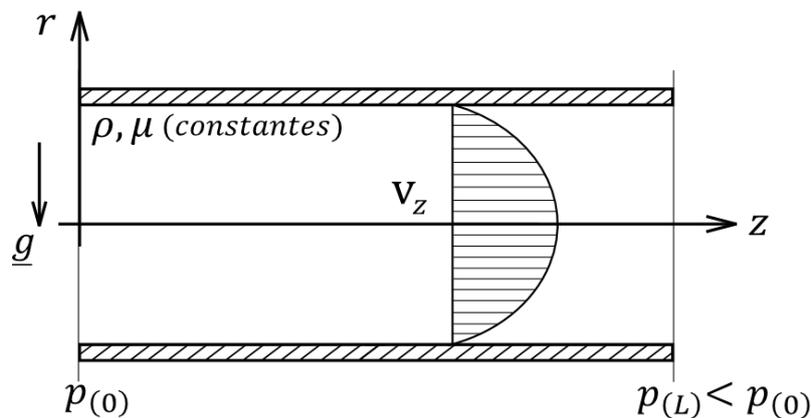


Figura 8.6: Tubo capilar por donde fluye un flujo laminar newtoniano debido a un gradiente de presión. Se ve el perfil de velocidades parábolicas denominado "flujo Poiseuille".

Simplificando los términos de las componentes de Navier-Stokes que son idénticamente nulos, daremos con la ecuación diferencial que gobierna nuestro problema:

$$r: 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r$$

$$\theta: 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$z: 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right]$$

8.5 ECUACION DIFERENCIAL PARA FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESIBLES

Las dos primeras ecuaciones reflejan la dependencia de la presión con la altura hidrostática que por las coordenadas utilizadas queda acoplada entre las variables r y θ . Dadas las pequeñas dimensiones del capilar, dichas ecuaciones pueden despreciarse y considerar a la presión como función exclusiva de z . Luego, tenemos:

$$\frac{dp}{dz} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] = Kt$$

Resulta, también en este caso, que el gradiente de presión es constante con lo que la integración de la ecuación diferencial quedará:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \frac{r}{\mu} \Rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{dp}{dz} \frac{r}{2\mu} + \frac{C_1}{r} \Rightarrow v_z = \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2$$

Las condiciones de contorno en este caso deben remover la indeterminación que se produce cuando $r = 0$, ya que de otro modo el resultado no tendría sentido físico. Por ello, se establece que:

$$\begin{aligned} r = 0, v_z \text{ es finita} \\ r = R, v_z = 0 \end{aligned}$$

La primera condición deriva en que la constante C_1 se anula y la segunda condición -de no deslizamiento- permite obtener el perfil de velocidad buscado, parabólico y denominado Poiseuille:

$$v_z = -\frac{dp}{dz} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

El gradiente de presión, resuelto de similar forma que en el caso del flujo entre placas, resulta:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{p(L) - p(0)}{L} < 0$$

Los esfuerzos cortantes en cualquier nivel de la variable r pueden obtenerse con la siguiente expresión:

$$\tau_{rz} = \mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} < 0 \quad \forall r \Rightarrow \tau_{rz}|_{r=R} = \frac{R}{2} \frac{dp}{dz}$$

En la figura 8.7 puede verse como actúa el esfuerzo cortante en el fluido y en las paredes interiores del capilar, de acuerdo al signo de estos y al signo del versor normal a las superficies. Se ve como las paredes actúan sobre el flujo tratando de impedir el movimiento, mientras que el flujo actúa sobre las paredes tratando de arrastrarlas.

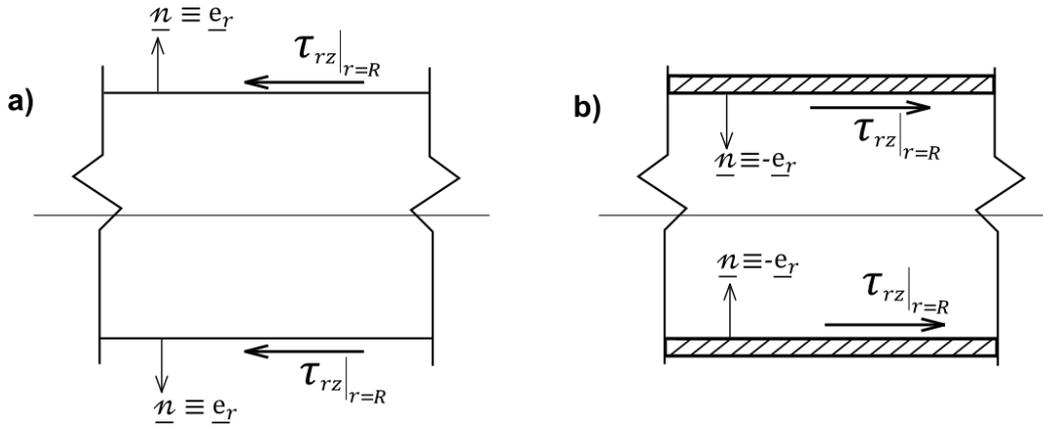


Figura 8.7: a) Tensiones de corte actuantes en el fluido, en la superficie de contacto con el tubo. b) Tensiones de corte actuantes en la pared interior del tubo.

El caudal circulante se obtiene por integración del campo de velocidad en una sección recta genérica:

$$Q = \int_A \left\{ -\frac{dp}{dz} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\} dA = \int_0^R \left\{ -\frac{dp}{dz} \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\} 2\pi r dr$$

$$Q = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\mu L} = \frac{\Delta p \pi D^4}{128\mu L} \quad (8.17)$$

La expresión (8.17) se conoce con el nombre de "ley de Hagen-Poiseuille" debido a que prácticamente en paralelo (siglo XIX) ambos científicos llegaron a proponerla como ley de flujo laminar en conductos. Hagen era ingeniero y Poiseuille médico.

En la referencia [16] Ud. encontrará un trabajo donde se modela la mecánica de un aneurisma suponiendo válida localmente la ley de Hagen-Poiseuille y obteniendo de ese modo una pseudo ecuación de Reynolds para un capilar de sección variable y paredes distensibles.

8.5.3 Las condiciones de contorno más comunes

En los dos subítems anteriores hemos visto dos ejemplos en distintos sistemas coordenados, en los que hemos impuesto diferentes condiciones de borde para extraer de las familias de funciones que surgen de la solución de una ecuación diferencial, aquella que gobierna el problema en análisis. Hemos dicho también que las condiciones de contorno son la identidad del problema porque una misma ecuación diferencial puede pertenecer a distintos problemas del mismo tipo. Por ejemplo, si el problema de la figura 8.1 hubiese tenido la placa superior fija, o moviéndose en el otro sentido, o bien moviéndose las dos placas, la ecuación diferencial sería exactamente la misma y sólo cambiarían las condiciones de contorno; en todos estos casos -siempre- de no deslizamiento.

Hay que destacar también las condiciones de borde que se imponen cuando dos fluidos fluyen en contacto a través de una interfase recta. Estos fluidos pueden

8.5 ECUACION DIFERENCIAL PARA FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESIBLES

ser dos líquidos o un líquido y un gas. En una interfase recta, la continuidad de tensiones en cada punto ($\underline{t}(n) = -\underline{t}(-n)$, ver ecuación 4.7) lleva a plantear que los esfuerzos cortantes a ambos lados de la misma son iguales (tener en cuenta que cambia el sentido de la dirección normal para cada medio; ver fig. 4.13), además y debido al no deslizamiento, las velocidades de las partículas de los medios en contacto son las mismas. Estas dos condiciones terminan siendo condiciones de borde en el perfil de velocidad dado que los esfuerzos cortantes dependen directamente de los gradientes de velocidad. Naturalmente, las presiones son iguales a ambos lados de una interfase recta, pero ello no aporta una condición de contorno útil para la integración de una ecuación diferencial en la velocidad. Resumidamente, podemos decir que las condiciones de contorno las podemos categorizar en las siguientes clases:

a) No deslizamiento:

$$V_{\text{fluido}} = V_{\text{sólido}}$$

b) Continuidad de tensiones en una interfase recta:

$$V_{\text{fluido I}} = V_{\text{fluido II}}$$

$$\tau_{\text{fluido I}} = \tau_{\text{fluido II}}$$

Por ejemplo, en coordenadas cartesianas y para fluidos newtonianos en flujo unidimensional como muestra la figura 8.8-a, en $y = h_1$ se tiene:

$$\tau_{yx \text{ fluido I}} = \mu_I \frac{dv_{Ix}}{dy} = \mu_{II} \frac{dv_{IIx}}{dy} = \tau_{yx \text{ fluido II}}$$

Una consecuencia que se desprende de aquí, dado que la viscosidad es un parámetro intrínsecamente positivo, es que las pendientes de los perfiles de velocidad de los fluidos I y II tienen que tener el mismo signo. Si el fluido I es un líquido y el fluido II es un gas, μ_{II} es unas mil veces menor que μ_I , para lo cual la condición de contorno puede aproximarse a:

$$\frac{dv_{Ix}}{dy} = 0$$

Dicha condición es muy utilizada cuando hay flujo con superficie libre en contacto con aire calmo como lo muestra la figura 8.8-b; allí la fuerza motora es la gravedad que cumple una función análoga a una diferencia de presión en flujos perpendiculares a la aceleración de la gravedad. Observe la elección del sistema coordenado. Ud. debe ser capaz de adaptar estas condiciones de borde a otras coordenadas.

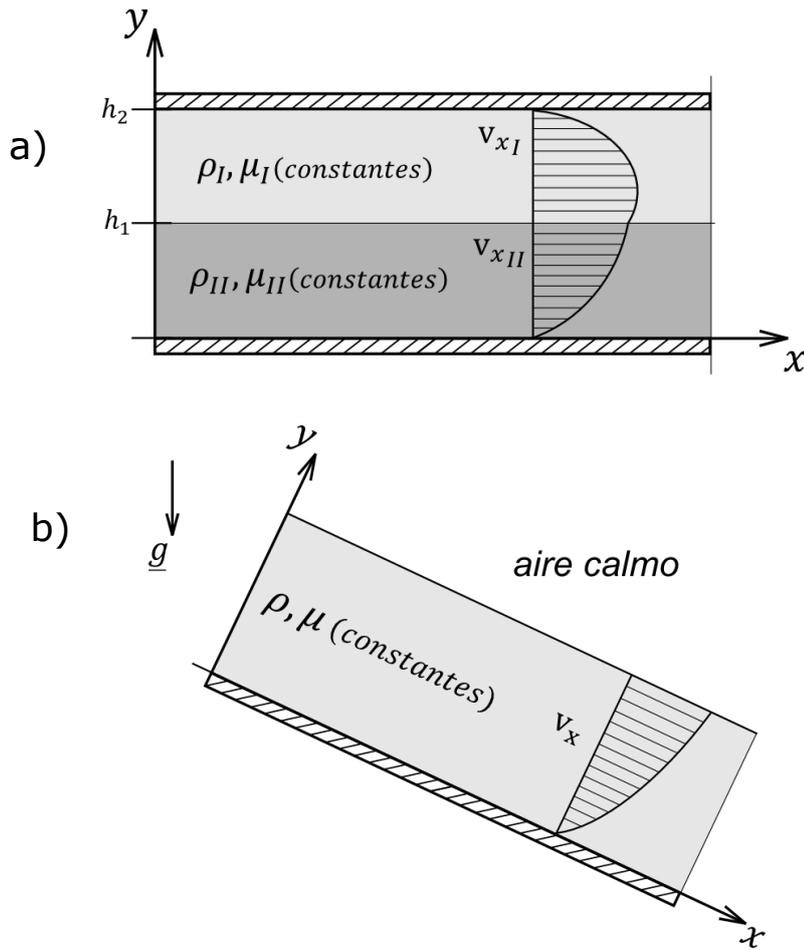


Figura 8.8: a) Dos fluidos newtonianos inmiscibles fluyendo entre placas paralelas. Los perfiles de velocidad deben tener las pendientes del mismo signo. b) Un fluido newtoniano derramándose por gravedad sobre una placa fija. En la interfase con el aire el gradiente de velocidad es cero.

c) Condiciones de contorno en $r = 0$ ó $r \rightarrow \infty$ para coordenadas cilíndricas

Hemos tenido este caso cuando resolvimos el perfil de velocidad para el flujo laminar en un tubo. Dado que la coordenada r puede valer cero y la integración en coordenadas cilíndricas introduce división por r o bien el logaritmo de r , en ese caso se utilizan condiciones de contorno intuitivas como:

"La velocidad debe ser finita" o "el esfuerzo cortante debe ser finito"

Ello habilita a anular los términos que se indeterminan cuando $r = 0$, haciendo cero la constante de integración que corresponda. Ello ha ocurrido con la integración de la ecuación diferencial para el flujo en un capilar que se ve en la figura 8.6.

Cuando r tiende a infinito, usualmente en problemas donde el campo de flujo está descrito por la componente tangencial $v_{\theta r}$, la condición de borde es que la velocidad se anula con pendiente cero (ver figura 8.9).

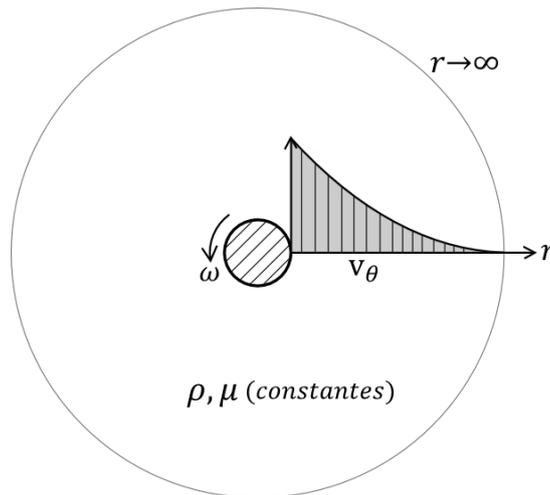


Figura 8.9: Flujo laminar de un fluido newtoniano en un medio infinito, debido a la rotación de un cilindro.

8.6 Ecuación diferencial de elasticidad

Cuando dedujimos la expresión (8.5) de la segunda ley de Newton en forma diferencial, dijimos que debía satisfacerse en todo punto de cualquier medio continuo. En este ítem estudiaremos casi a sobrevuelo el caso de un medio continuo sólido, esperando se vea que, tanto la Mecánica de los Fluidos como la Mecánica del Sólido, son vertientes de una única teoría que es la Mecánica de los Medios Continuos. En la referencia [17] (ver nota al pie en la página 138) Ud. encontrará un trabajo donde se plantea la analogía entre un flujo laminar de un fluido newtoniano entre placas paralelas fijas y la deformación de una viga recta sometida a flexión pura, analogía que se sustenta en lo dicho precedentemente. Reescribamos la ecuación (8.5):

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \right) = \rho \underline{g} + \underline{\nabla} \cdot \underline{T}$$

y analicemos los términos que la componen asumiendo que nuestro medio es un material sólido. En primer lugar, distingamos que un cuerpo sólido se deforma hasta alcanzar el equilibrio en una nueva configuración y, salvo en los elementos que giran, el término de aceleración convectiva es idénticamente nulo. En piezas que giran velozmente se introduce un patrón de tensiones radiales y tangenciales de muy alto valor para garantizar el giro de las partículas constitutivas del medio. Cuando la velocidad de rotación límite es superada las piezas estallan generando graves accidentes. Las piedras de amolar en las conocidas amoladoras angulares de mano, son un ejemplo del riesgo que implica utilizar muelas cuyo límite de velocidad de giro es inferior al de la máquina. Luego, en estos casos el término convectivo no puede ser despreciado para arribar a un conocimiento adecuado del estado tensional de piezas que se someten a grandes velocidades de rotación.

Asimismo, la derivada parcial respecto al tiempo de la velocidad sólo es distinta de cero cuando el cuerpo sólido se acelera para salir del reposo o cuando es actuado por cargas repetitivas de alta frecuencia, como le puede ocurrir a un diente de un engranaje o a un cigüeñal de motor alternativo debido a las descargas de las explosiones del combustible en los cilindros (varios miles de veces por minuto).

Finalmente, podemos decir que en la mayoría de los casos prácticos los problemas elásticos son "elastoestáticos" por lo que todo el miembro izquierdo de la (8.5) es nulo. Luego, una primera forma de la ecuación diferencial de elasticidad es:

$$0 = \rho \underline{g} + \underline{\nabla} \cdot \underline{T} \quad (8.18)$$

donde se retienen las fuerzas gravitacionales para ser tenidas en cuenta si son importantes. Algunos ejemplos en donde esto ocurre son: los cables de alta tensión donde su propio peso es la única carga que actúa sobre ellos, y las estructuras de hormigón donde su peso propio es del orden de las cargas que soportan.

En la mayoría de los casos de piezas mecánicas, el peso de las mismas es mucho menor que las cargas por contacto. Imagine la relación que habrá entre el peso de un engranaje de la caja de cambios de un automóvil y las fuerzas transmitidas a través de los dientes del mismo: totalmente despreciable. En esos casos, la ecuación (8.18) se transforma en:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{T} = 0 \quad (8.19)$$

Las componentes de la ecuación vectorial serán las siguientes según el sistema coordenado utilizado.

Coordenadas cartesianas

$$\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) = 0$$

Coordenadas cilíndricas

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) = 0$$

8.6.1 Principio de superposición

La ecuación diferencial de elasticidad, en sus dos versiones, la (8.18) y la (8.19), es una ecuación diferencial lineal. Ello es así debido a que en los términos que la componen no hay componentes de \underline{T} elevados a potencias mayores que uno, ni productos entre tensiones o sus derivadas. Luego, es propiedad de las ecuaciones diferenciales como la (8.19) que: si un campo tensional \underline{T}_1 es solución y otro campo tensional \underline{T}_2 también es solución, la combinación lineal de ambos ($k_1 \underline{T}_1 + k_2 \underline{T}_2$) es también una solución. Obviamente, ello puede extenderse a n campos tensoriales.

Esta propiedad habilita a tratar un problema complejo de carga como una suma de estados básicos que pueden ser estudiados individualmente, componiendo luego los campos tensionales para determinar la tensión total y de allí dimensionar el cuerpo para que resista las cargas o no se deforme más allá de lo admisible. Dado que para resolver la (8.19) es necesario introducir la ley constitutiva del material, para que esta composición sea físicamente real, éste debe ser un material elástico lineal. Tal composición de casos de carga básicos se denomina "Principio de Superposición" y fue incluso establecido empíricamente por el hombre desde antes de conocer el modelo elástico que representa la ecuación (8.19).

Seguidamente, demostraremos que las distribuciones de tensiones para los casos básicos obtenidas por métodos ad hoc del área de la Resistencia de Materiales, son solución de la ecuación (8.19). Estos casos básicos de carga son: tracción o compresión, corte puro, flexión pura y torsión pura.

8.6.2 Tracción o compresión

Supongamos la barra traccionada de la figura 8.10. El estado tensional se demuestra que es:

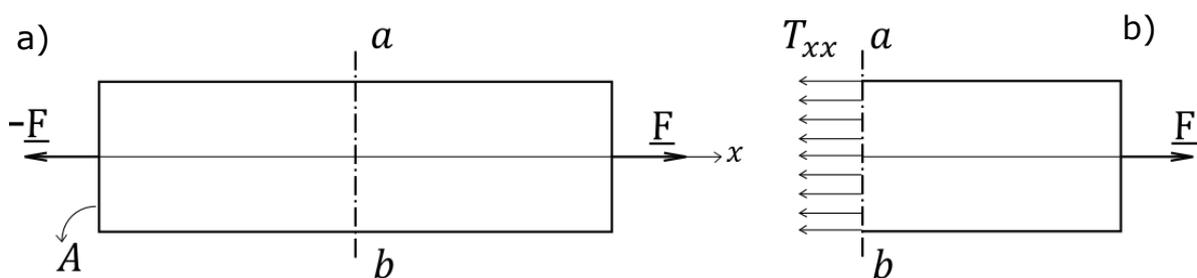


Figura 8.10: a) Tracción de una barra delgada. b) Distribución de tensiones normales en una sección perpendicular a la dirección de la fuerza de tracción.

$$T_{xx} = \frac{F}{A} = \text{const.}; \quad T_{xy} = T_{zx} = T_{yz} = T_{yy} = T_{zz} = 0$$

Luego, el único término que subsiste en las componentes cartesianas de la (8.19) es

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = 0 \Rightarrow T_{xx} \neq f(x)$$

Por lo que T_{xx} constante es solución de la (8.19).

8.6.3 Corte puro de barras de sección rectangular

Supongamos la barra sometida a corte puro de la figura 8.11. El estado tensional, debido a la simetría del tensor de tensiones, se demuestra que es:

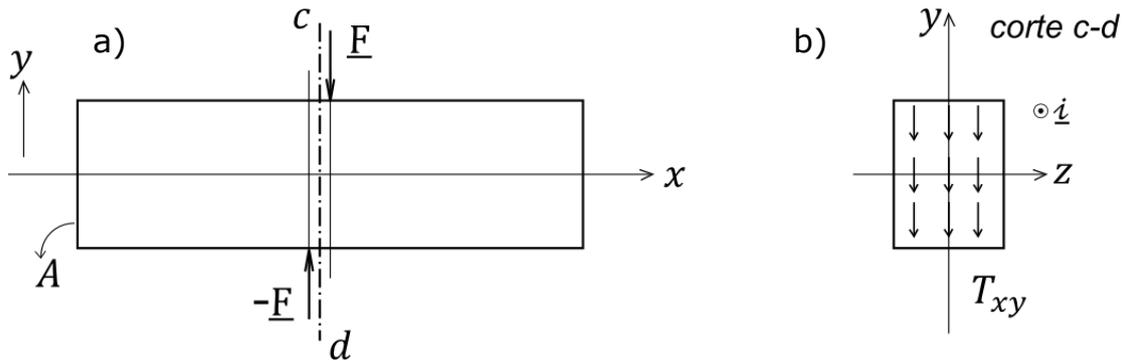


Figura 8.11: a) Barra sometida a corte puro por dos fuerzas no colineales pero infinitamente próximas (el esquema está exagerado). b) Distribución de tensiones de corte constantes en una sección recta rectangular.

$$T_{xy} = T_{yx} = \frac{F}{A} = \text{const.}; \quad T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = T_{zx} = T_{zy} = 0$$

Luego, los únicos términos que subsisten en las componentes cartesianas de la (8.19) son:

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} = 0 \Rightarrow T_{xy} = T_{yx} \neq f(x, y)$$

Por lo que T_{xy} constante es solución de la (8.19).

8.6.4 Flexión pura

Supongamos la barra sometida a un momento flector constante como se ve en la figura 8.12. El estado tensional se demuestra que es:

$$T_{xx} = -\frac{M}{I_{zz}} y = f(y); \quad T_{xy} = T_{zx} = T_{yz} = T_{yy} = T_{zz} = 0$$

Luego, el único término que subsiste en las componentes cartesianas de la (8.19) es:

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = 0 \Rightarrow T_{xx} \neq f(x)$$

Por lo que T_{xx} como función única de y , es solución de la (8.19).

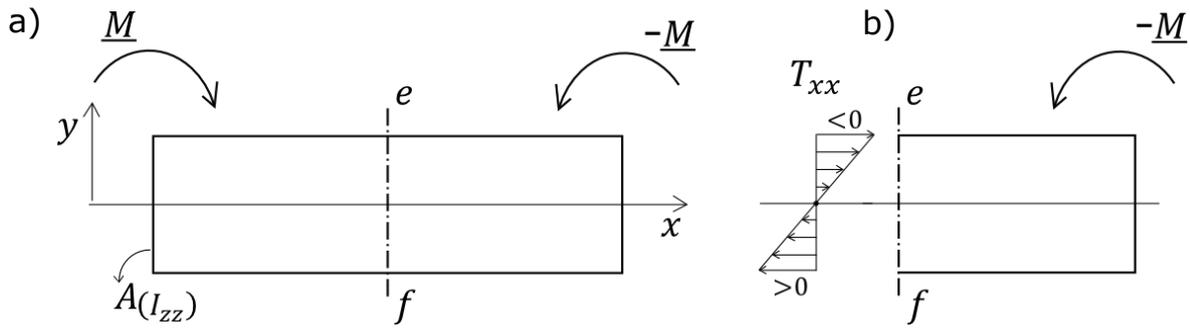


Figura 8.12: a) Viga sometida a flexión pura. b) Distribución de tensiones normales en una sección recta perpendicular al eje de la viga.

8.6.5 Torsión pura de barras de sección circular constante

Supongamos la barra sometida a un momento torsor constante como se ve en la figura 8.13. El estado tensional en coordenadas cilíndricas, debido a la simetría del tensor de tensiones, se demuestra que es:

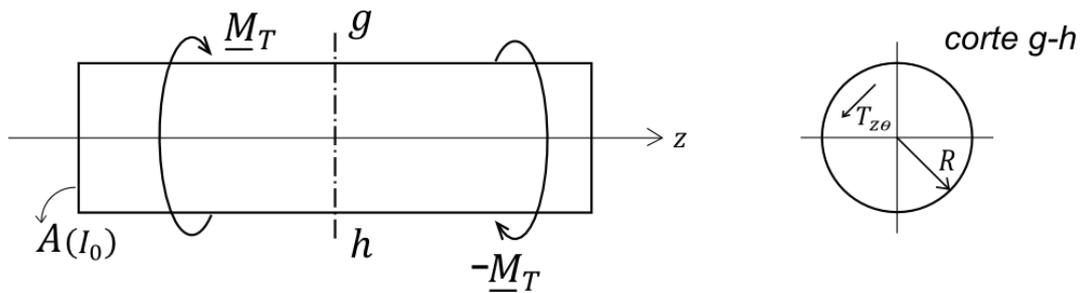


Figura 8.13: a) Barra cilíndrica sujeta a torsión pura. b) Sección recta perpendicular al eje de la barra. Se ve el tipo de tensión actuante en los puntos de la sección.

$$T_{z\theta} = \frac{M_T}{I_0} r = f(r) ; T_{\theta r} = T_{zr} = T_{rr} = T_{\theta\theta} = T_{zz} = 0$$

Luego, los únicos términos que subsisten en las componentes cilíndricas de la (8.19) son

$$\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} = 0 ; \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow T_{z\theta} = T_{\theta z} \neq f(\theta, z)$$

Por lo que $T_{z\theta}$ como función única de r , es solución de la (8.19).

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) ¿Qué se obtiene de la solución de planteos utilizando balances diferenciales?

CAPITULO 8: BALANCE MICROSCOPICO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

- 2) ¿En qué se diferencia el balance microscópico de cantidad de movimiento lineal aplicable a todo medio continuo, con el aplicable a cualquier medio fluido?
- 3) ¿En qué se diferencia el balance microscópico de cantidad de movimiento lineal aplicable a cualquier medio fluido, con el aplicable a fluidos newtonianos?
- 4) ¿Qué analogías pueden hacerse entre la viscosidad de un fluido newtoniano y los dos módulos elásticos de un sólido elástico lineal?
- 5) ¿Las ecuaciones de Navier-Stokes son válidas para que características de fluidos?
- 6) Se sabe que una ecuación diferencial puede gobernar distintos casos de flujos parecidos, entonces, ¿cómo se obtiene la solución para el flujo que se está resolviendo?
- 7) Si el canal de flujo viscoso entre una placa plana y una móvil no es de altura constante, sino convergente, el gradiente de presión en cada sección depende de la altura local del canal, del caudal, de la velocidad de la placa móvil y de la viscosidad. Demuéstrelo.
- 8) ¿En qué consiste la aproximación de lubricación?
- 9) Enumere las condiciones de flujo que dan lugar a la llamada fórmula de Hagen-Poiseuille.
- 10) Enumere las condiciones de contorno más comunes utilizadas en modelos de flujo para coordenadas cartesianas.
- 11) Enumere las condiciones de contorno más comunes utilizadas en modelos de flujo para coordenadas cilíndricas.
- 12) De la ecuación del balance microscópico de cantidad de movimiento lineal aplicable a todo medio continuo, obtenga la ecuación diferencial de elasticidad. ¿Para qué casos debe retenerse el término de aceleración convectiva?
- 13) Discuta el sustento matemático del principio de superposición.
- 14) Pruebe que el tensor de tensiones en un punto de una barra traccionada o comprimida, satisface la ecuación diferencial de elasticidad.
- 15) Pruebe que el tensor de tensiones en un punto de una barra sujeta a corte puro, satisface la ecuación diferencial de elasticidad.
- 16) Pruebe que el tensor de tensiones en un punto de una viga sometida a flexión pura, satisface la ecuación diferencial de elasticidad.
- 17) Pruebe que el tensor de tensiones en un punto de una barra cilíndrica circular, sometida a torsión pura, satisface la ecuación diferencial de elasticidad.

CAPITULO

9

Balance Macroscópico de Energía Mecánica

9.1 Introducción

En este capítulo volveremos a las formulaciones integrales o macroscópicas, particularmente para obtener una expresión del balance de energía mecánica para resolver problemas donde la energía sea la variable de interés, ya sea para dimensionar equipos o dimensionar instalaciones según los requerimientos de flujo. Este y los capítulos 11 y 12, son quizás los de mayor aplicación práctica de la ingeniería, puesto que el cálculo y dimensionamiento de cañerías y bombas de impulsión, se realizan con el balance que vamos a desarrollar.

El análisis diferirá un poco de los otros balances macroscópicos que hemos desarrollado porque se realizarán varias aproximaciones a fin de que los problemas sean resolubles con los métodos analíticos y cuentas de lápiz y papel. Dichas aproximaciones nos darán un balance que es muy apropiado para el dimensionamiento o comprobación de equipos e instalaciones que impulsan agua, las cuales están presentes en todas las construcciones civiles e industriales.

9.2 Expresión diferencial del primer principio de la Termodinámica

El primer principio de la Termodinámica establece que la variación del estado energético de un sistema está en relación con el trabajo efectuado sobre él y el

calor conducido hacia él, teniendo en cuenta que el trabajo y el flujo de calor pueden ser positivos o negativos, requiriendo ello la necesidad de una convención de signos. La forma diferencial usual –es decir en la forma de pequeñas variaciones- en que se presenta este principio, es la siguiente:

$$dE = dQ - dW \quad (9.1)$$

Donde E representa la energía total dada por la suma de todos los tipos de energía, Q representa la energía aportada o retirada del sistema en forma de calor, y W representa el trabajo en las distintas formas en que éste puede hacerse sobre el sistema o el sistema puede hacerlo sobre el medio ambiente. Las magnitudes de la ecuación (9.1) tienen todas unidades de energía, es decir [Nm = J] en el sistema internacional o sus equivalentes en otros sistemas.

Vamos a considerar los tipos de energía conocidos como energía cinética, energía potencial gravitacional y energía interna. Por su parte, el trabajo será aquel que realicen fuerzas no conservativas en relación con el desplazamiento que sufren. Respecto a esto, debe aclararse que el signo negativo de la ecuación (9.1) precediendo al trabajo implica que éste es negativo si se realiza sobre el sistema y positivo si el sistema lo realiza sobre su medio ambiente. Dicho de otro modo, en virtud de la expresión (9.1), el trabajo de una fuerza que se desplaza estaría definido como:

$$W = -\underline{F} \cdot \underline{s}$$

Es decir, exactamente al contrario de cómo se define el trabajo en los textos de Física Mecánica. Esto no es una contradicción ya que la definición de trabajo es arbitraria en este aspecto.

Por otra parte, como vamos a estudiar el balance de Energía Mecánica, tampoco consideraremos el flujo de calor en nuestros sistemas. Al ser diferenciales totales los de la expresión (9.1), podemos dividirla miembro a miembro por el dt . Luego, con las consideraciones precedentes, la (9.1) se transforma en:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{dW}{dt} = -\dot{W} \quad (9.2)$$

Las magnitudes en la expresión (9.2) tendrán unidades de energía sobre la unidad de tiempo, es decir, unidades de potencia que en el sistema internacional es [Nm/s = J/s = W], que recibe el nombre de "Watt".

9.3 Balance macroscópico de energía mecánica

Los problemas de interés en los cuales vamos a utilizar la herramienta que nos disponemos a obtener, serán básicamente del tipo de la figura 9.1, es decir: la entrada a una conducción de fluido, un dispositivo que hace trabajo sobre el fluido (bomba) o que recibe trabajo del fluido (turbina), y una salida en la cual se entrega el fluido con un estado energético diferente. Claramente, estos son

ejemplos donde los volúmenes de control no son sistemas cerrados –es decir, volúmenes materiales-, porque hay un flujo de masa entre la entrada y la salida. Seguidamente veremos cómo, a partir de la formulación para sistemas cerrados, obtendremos una expresión de utilidad para nuestros problemas.

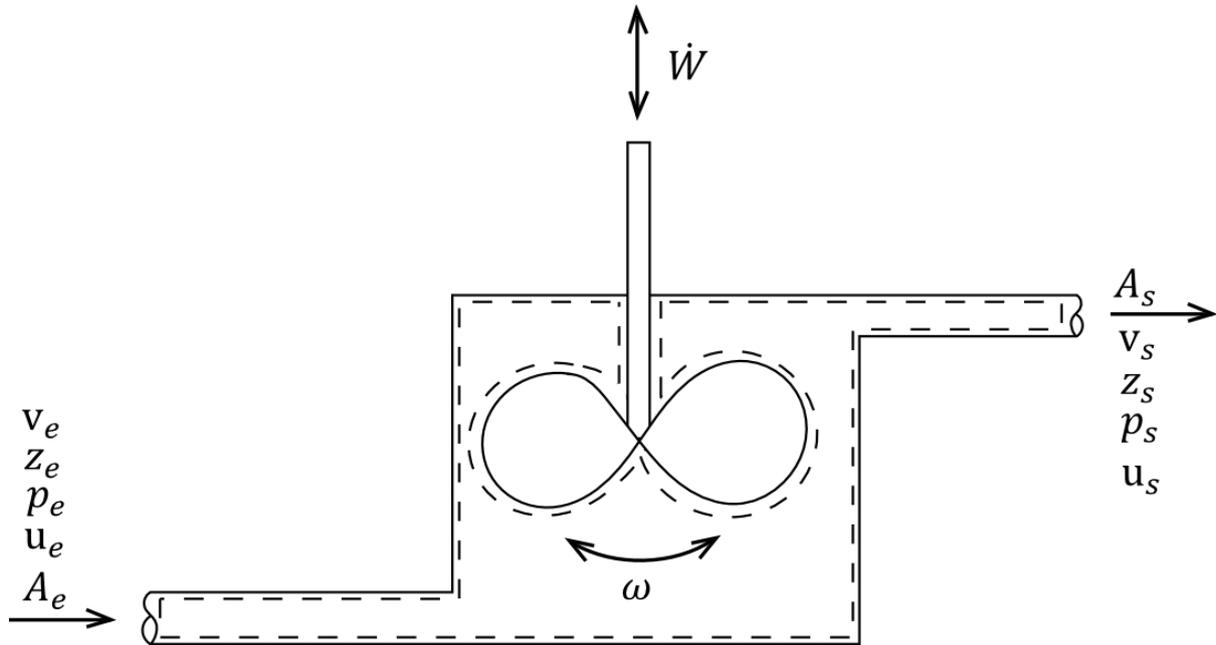


Figura 9.1: Esquema genérico de un sistema de conducción de fluido conteniendo una máquina fluidodinámica (se han omitido los versores normales a las áreas del volumen de control).

Como dijimos en el párrafo anterior, la energía la evaluaremos en términos de energía cinética, energía potencial gravitacional y energía interna. Al ser nuestro medio un fluido cuyas partículas poseen velocidades y posiciones distintas, expresaremos la variable macroscópica E en un volumen material como una integral de una magnitud intensiva, dada como energía por unidad de masa (e). Esto es:

$$E = \int_{V_m(t)} e \rho dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{v^2}{2} + g z + u \right) \rho dV \quad (9.3)$$

Reemplazando luego la (9.3) en la (9.2), tenemos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} e \rho dV = -\dot{W} \quad (9.4)$$

En el capítulo 7 dedujimos una expresión general derivada del teorema del transporte que permite obtener una formulación aplicable a un volumen de control arbitrario. Esta es la ecuación (7.20) que empleada para la (9.4) nos dará:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} e \rho \, dV + \int_{A_{eys}(t)} e \rho [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] \, dA = -\dot{W} \quad (9.5)$$

Debe aclararse que las integrales tomadas en el volumen y áreas arbitrarias del segundo miembro de la (7.20) ¹, están expresadas en la (9.5) por el negativo del trabajo neto realizado en la unidad de tiempo sobre el volumen arbitrario. Asimismo, la mayoría de los casos que nos van a ocupar se producen en condiciones y espacios que nos ayudarán a simplificar la (9.5); particularmente tendremos estado estacionario y volúmenes de control arbitrarios donde las únicas superficies móviles son superficies sólidas impermeables en las que se cumple que $\underline{w} = \underline{v}$. Luego, el primer término del primer miembro de la (9.5) se anula y en el segundo término desaparece la velocidad del volumen de control ($\underline{w} = 0$ en las áreas de entrada y salida). Así:

$$\int_{A_{eys}} e \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dA = -\dot{W} \quad (9.6)$$

Por otra parte, el trabajo por unidad de tiempo efectuado por las fuerzas no conservativas lo consideraremos dividido en: trabajo por unidad de tiempo realizado por fuerzas sobre las superficies móviles, trabajo por unidad de tiempo efectuado por las fuerzas de presión en las áreas de entrada y salida, y trabajo por unidad de tiempo efectuado por las fuerzas viscosas, también en las áreas de entrada y salida. Claramente, las mencionadas son las áreas donde hay desplazamiento de fuerzas, por el contrario, no habrá trabajo realizado en las áreas fijas en las que las fuerzas por presión y por tensiones de corte no se desplazan. Las denominadas áreas móviles son clásicamente las superficies de impulsión, ya sean parte de los rotores de las bombas o turbinas de tipo centrífugo, o las cabezas de pistón de las bombas de desplazamiento positivo. Luego, la (9.6) será:

$$\int_{A_{eys}} e \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dA = -\dot{W}_{sup \text{ móviles}} - \dot{W}_{presión \, eys} - \dot{W}_{\tau(\mu) \, eys} \quad (9.7)$$

El trabajo por unidad de tiempo realizado sobre las superficies móviles es en general muy difícil de calcular, por lo compleja de las superficies en el caso de rotores y por las también complejas distribuciones de tensiones en el fluido dentro de las máquinas hidráulicas. Por ello, trabajaremos con su valor total y lo llamaremos "trabajo en el eje", es decir, transferido a través de un eje en el sentido que sea: saliendo o entrando al sistema. El trabajo por unidad de tiempo realizado por las fuerzas viscosas es despreciable, dado que las componentes

¹ Debe aclararse que el trabajo por unidad de tiempo efectuado por la fuerza gravitacional no se expresa en el segundo miembro de la expresión (9.5), debido a que participa del primer miembro como variaciones de energía potencial, también por unidad de tiempo.

9.3 BALANCE MACROSCOPICO DE ENERGIA MECANICA

viscosas que realizan trabajo (τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} en coordenadas cartesianas) son de pequeña magnitud, más aún si el fluido es de baja viscosidad (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} son perpendiculares al desplazamiento). El trabajo en la unidad de tiempo realizado por las fuerzas de presión y según la definición tratada en el ítem 9.2, será:

$$\dot{W}_{presión\ eys} = - \int_{Aa\ eys} \underline{n} p \cdot \underline{v} \, dA = \int_{Aa\ eys} p (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dA \quad (9.8)$$

Reemplazando la (9.8) en la (9.7) y agrupando integrales de área en el primer miembro:

$$\int_{A\ eys} \left(\frac{v^2}{2} + g z + \frac{p}{\rho} + u \right) \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dA = -\dot{W}_{eje}$$

donde $\dot{W}_{eje} < 0 \rightarrow$ bomba y $\dot{W}_{eje} > 0 \rightarrow$ turbina

(9.9)

El signo establecido para bombas y para turbinas, está en concordancia con la definición de trabajo inherente a la expresión (9.1).

En la introducción del capítulo habíamos dado cuenta de que los problemas que nos iban a ocupar serían aquellos de impulsión y conducción de agua a través de cañerías. En estos casos, el agua fluye usualmente en régimen turbulento, para lo cual es muy conveniente aproximar el perfil de velocidades en las secciones de entrada y de salida mediante un flujo plano, es decir, mediante una velocidad media constante tanto en el área de flujo como en el tiempo (localmente un flujo turbulento no es estacionario). Asimismo, la presión se supondrá constante en las áreas de entrada y de salida y la densidad también será constante. Estas aproximaciones simplifican el cálculo de las integrales de la ecuación (9.9) ya que la velocidad sale fuera de las integrales. Para el caso de la figura 9.1 donde hay sólo una entrada y una salida, tendremos:

$$\begin{aligned} -\dot{W}_{eje} = & \frac{v_{ms}^2}{2} v_{ms} A_s \rho - \frac{v_{me}^2}{2} v_{me} A_e \rho + g v_{ms} \rho \int_{A_s} z \, dA - g v_{me} \rho \int_{A_e} z \, dA \\ & + p_s v_{ms} A_s - p_e v_{me} A_e + u_{ms} \rho v_{ms} A_s - u_{me} \rho v_{me} A_e \end{aligned} \quad (9.10)$$

Las integrales que aparecen en los términos de energía potencial gravitacional son los momentos estáticos de primer orden de las áreas de salida y de entrada respectivamente que, por definición, pueden expresarse como el producto del área por la altura del baricentro de la sección. Aunque no lo hemos dicho, estamos considerando la energía interna por unidad de tiempo en términos de una energía interna por unidad de tiempo promedio en las áreas de entrada y salida a los fines de simplificar la expresión. Ello no es violatorio de ningún principio y

nos ayudará a escribir la ecuación (9.10) de una forma homogénea, donde la variación de energía interna por unidad de tiempo será un dato o se calculará con métodos ad hoc. La variación de energía interna por unidad de tiempo entre la salida y la entrada siempre será una magnitud positiva y de cómputo indirecto a través del conocimiento de otras variables energéticas. Dicha diferencia englobará lo que llamaremos "pérdida de energía" o "pérdida de carga", esto es una energía por unidad de tiempo intercambiada generalmente en energía térmica por unidad de tiempo y evidenciada en la elevación de la temperatura del fluido en la sección de salida. Su origen es la disipación viscosa por el rozamiento del fluido consigo mismo en todo el volumen de control, fundamentalmente en las cercanías de las paredes sólidas que lo confinan. Luego,

$$\begin{aligned}
 -\dot{W}_{eje} = & \frac{v_{ms}^2}{2} v_{ms} A_s \rho - \frac{v_{me}^2}{2} v_{me} A_e \rho + g v_{ms} \rho z_{cs} A_s - g v_{me} \rho z_{ce} A_e \\
 & + p_s v_{ms} A_s - p_e v_{me} A_e + u_{ms} \rho v_{ms} A_s - u_{me} \rho v_{me} A_e
 \end{aligned}
 \tag{9.11}$$

Los términos en la expresión (9.11) poseen unidades de potencia y el grado máximo de la variable velocidad es cúbico. Es usual que haya problemas donde la incógnita es el caudal –por ende, la velocidad- dadas cierta cañería y bomba. Trabajar con la expresión (9.11) implica resolver una ecuación cúbica para determinar una de las velocidades (la otra está vinculada con la primera mediante el balance de masa). Por ello, cuando el problema posee una única entrada y una única salida, puede dividirse miembro a miembro la expresión (9.11) por el flujo en peso (flujo másico por la aceleración de la gravedad) y con ello bajar el grado de la velocidad en el balance de energía por unidad de tiempo. Teniendo en cuenta que

$$v_{ms} A_s \rho = v_{me} A_e \rho
 \tag{9.12}$$

$$-\frac{\dot{W}_{eje}}{v_{ms} A_s \rho g} = -\dot{w}_{eje} = \frac{v_{ms}^2}{2g} - \frac{v_{me}^2}{2g} + z_{cs} - z_{ce} + \frac{p_s}{\rho g} - \frac{p_e}{\rho g} + \frac{u_{ms}}{g} - \frac{u_{me}}{g}
 \tag{9.13}$$

La expresión (9.13) es un balance donde las dimensiones son las de longitud, es decir, que las energías por unidad de tiempo están expresadas en "metros"; estos pueden interpretarse como metros de columna de fluido, usualmente y como hemos dicho: agua. La (9.13) presenta menos dificultades de resolver cuando la incógnita es la velocidad, puesto que es más sencillo resolver una ecuación de segundo grado que una de tercer grado. Podemos todavía escribir la (9.13) en forma de variaciones o incrementos:

$$-\dot{w}_{eje} = \Delta \left(\frac{v_m^2}{2g} + z_c + \frac{p}{\rho g} + \hat{u}_m \right); \text{ siendo } \Delta \hat{u}_m = h, \text{ pérdida de carga}
 \tag{9.14}$$

Debe advertirse que la utilización de la ecuación (9.14) es restrictiva de problemas en los que hay una única entrada y una única salida, es decir, del tipo representado en la figura 9.1. Si la instalación tuviese más de una entrada o más de una salida, hay que balancear las energías por unidad de tiempo totales a través de la ecuación (9.11), en la que aparecerán tantos términos de entradas y de salidas como secciones con estas características haya. Del mismo modo y aún en sistemas con una única entrada y una única salida, si el fluido que ingresa o egresa, lo hace con distintas variables energéticas, el planteo del balance también debe hacerse en términos de energías totales.

9.4 Un esquema ingenieril simplificado del sistema circulatorio sanguíneo

El sistema cardiovascular es el encargado de hacer circular la sangre por el organismo haciendo que llegue a todos los sectores del mismo para llevar el oxígeno necesario para la oxidación del carbono proveniente de los nutrientes. Esto hace posible la obtención de energía para el sostenimiento de la vida. Dicho de otro modo, podríamos decir que la vida -entre otras cosas- es posible gracias a un flujo de fluido.

En primera aproximación podríamos pensar al sistema cardiovascular como un circuito cerrado constituido por dos partes: el sistema arterial y el sistema venoso. El corazón, en tanto bomba impulsora, es en rigor un sistema de impulsión de dos bombas conectadas en serie (ver ítem 12.5.3): el corazón derecho (CD), que recibe la sangre del sistema venoso y la impulsa al pulmón para que se realice el intercambio de CO_2 por O_2 y el corazón izquierdo (CI) que impulsa la sangre oxigenada al sistema arterial para que se produzca la sesión del O_2 a las células y se reciba el CO_2 . Un esquema de dicho circuito cerrado, en códigos ingenieriles, puede verse en la figura 9.2.

Debe considerarse que tal aproximación sería válida en un corto lapso de tiempo, debido a que al torrente sanguíneo permanentemente se está agregando fluido y también, permanentemente, se está extrayendo fluido por la filtración que realizan los riñones.

Podemos calcular la potencia del corazón, es decir el trabajo por unidad de tiempo que realiza impulsando la sangre en ambos circuitos. La figura 9.3 es un esquema muy simplificado del corazón con las dos entradas y las dos salidas que posee. Tomando como referencia la presión de llegada de la sangre desde el sistema venoso (cero), en estado basal el corazón elevará la presión en 100 [mmHg] a un caudal de 5 [l/min] de sangre, perdiéndose en el sistema pulmonar una carga de aproximadamente 10 [mmHg]².

Con los datos de las presiones de la figura 9.3 puede plantearse la ecuación (9.14) a cada etapa de elevación de presión, suponiendo entradas y salidas del mismo diámetro, despreciando las variaciones de altura y las pérdidas de carga

² Se recuerda que 760 mm de mercurio corresponden a la presión atmosférica o $1,01 \times 10^5$ Pa (ver ítem 5.4.1).

CAPITULO 9: BALANCE MACROSCOPICO DE ENERGIA MECANICA

internas al corazón. Ello se justifica en el pequeño tamaño del corazón. Luego, para el CD, se tiene:

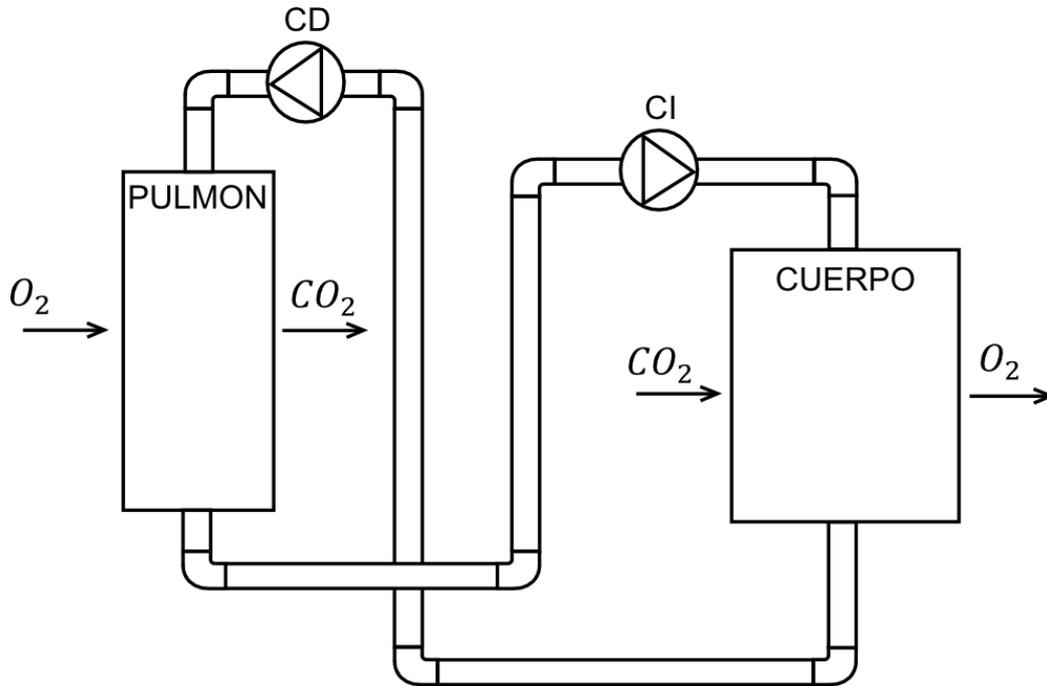


Figura 9.2: Esquema ingenieril del circuito sanguíneo. El corazón está representado como dos bombas en serie: el corazón derecho (CD) y el corazón izquierdo (CI).

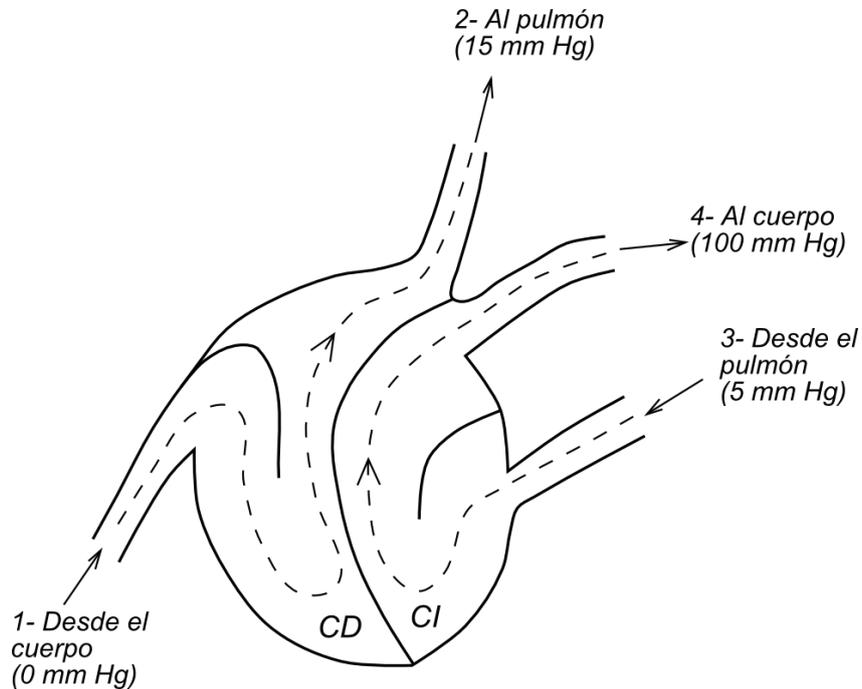


Figura 9.3: Esquema simplificado de un corazón real, donde se indican las entradas y las salidas del corazón derecho y del corazón izquierdo.

$$\begin{aligned}
 -\dot{w}_{CD} &= \frac{p_2 - p_1}{\rho g} \Rightarrow \dot{W}_{CD} = -(p_2 - p_1) Q \\
 &= -15 \text{ [mmHg]} \frac{10^5 \text{ [Pa]}}{760 \text{ [mmHg]}} \frac{1 \text{ [min]}}{60 \text{ [s]}} 5 \times 10^{-3} \frac{\text{[m}^3\text{]}}{\text{[min]}} = -0,165 \text{ [W]}
 \end{aligned}$$

Por su parte, para el CI, se tiene:

$$\begin{aligned}
 -\dot{w}_{CI} &= \frac{p_4 - p_3}{\rho g} \Rightarrow \dot{W}_{CI} = -(p_4 - p_3) Q \\
 &= -95 \text{ [mmHg]} \frac{10^5 \text{ [Pa]}}{760 \text{ [mmHg]}} \frac{1 \text{ [min]}}{60 \text{ [s]}} 5 \times 10^{-3} \frac{\text{[m}^3\text{]}}{\text{[min]}} = -1,042 \text{ [W]}
 \end{aligned}$$

La potencia de bombeo del corazón es la suma de los trabajos por unidad de tiempo realizados por ambos corazones. En estado basal, y en valores absolutos, ella es aproximadamente 1,2 [W].

En circunstancias de ejercicio físico intenso, el caudal se eleva 4 veces y la elevación de presión un 50%, con lo cual la potencia del corazón aumenta seis veces. Hay que destacar que ésta es la potencia que el corazón le entrega al flujo y para realizarlo requiere 10 veces más energía para poder mantener sus músculos en tensión. En condiciones basales, el corazón toma 5 de los 36 [W] que produce el organismo. Como bomba es muy poco eficiente, pero a cambio tiene una duración muy larga a la que cualquier bomba producida por el hombre no podría aspirar, más aún trabajando continuamente. A lo largo de una vida promedio (unos 75 años) el corazón realiza un trabajo equivalente a subir 30.000 litros de agua a la cumbre del Everest.

9.5 El sistema circulatorio sanguíneo en condiciones de ingravidez

Este es el caso de los astronautas en el espacio donde pueden pasar estadías prolongadas en un ambiente de gravedad cero. Los buzos también están sujetos a un estado de microgravedad, aunque el tiempo de inmersión no es tan largo como las estadías de los astronautas en el espacio.

La ecuación (9.11) indica que, si desaparecen los términos de energía potencial, la potencia de la bomba –el corazón- se invertirá en mayores diferencias de presión sobre un mayor caudal, compensando mayores pérdidas de carga.

El riesgo inmediato al que se someten los astronautas está relacionado con los efectos de la hipertensión y mayores esfuerzos cortantes en las paredes arteriales que pueden provocar desprendimientos de placas de aterosclerosis y consecuentes obstrucciones isquémicas. Asimismo, la sobrepresión en el corazón puede provocar la dilatación del mismo. No obstante, el cuerpo puede mitigar estos riesgos reduciendo la frecuencia del pulso cardíaco y con ello el caudal sanguíneo.

9.6 Aerosustentador. Un análisis preliminar usando los tres balances macroscópicos estudiados

Definamos un aerosustentador como una máquina que, a través de un chorro de aire a velocidad suficiente, es capaz de mantenerse en equilibrio con una carga sobre él sin tocar el suelo. La figura 9.4 muestra un diseño inicial en sus vistas anterior y superior, junto a un diagrama de fuerzas que deben sumar cero como condición para el análisis. La carga sobre el aerosustentador está indicada con un cuerpo de masa M .

Supongamos que el aparato se encuentra en aire calmo, que el aire ingresa a través de un área grande y en dirección radial de modo que la interacción neta del aerosustentador con el aire, en cualquier dirección perpendicular al eje del mismo será nula. A su vez, el aire se expulsa de la máquina en la dirección de su eje, con una velocidad grande, a través de un área bastante más pequeña que la de entrada.

La interacción neta del aparato con el fluido en la dirección de su eje –el eje z – deberá compensar el peso del conjunto formado por el aerosustentador y la carga sobre él. Luego, la fuerza que el fluido haga sobre el sólido, debe ser de la misma intensidad que el peso total y de sentido contrario. Es decir:

$$\underline{F}_{\text{Liq-Sól}} = (M + m) g \underline{k}$$

Naturalmente, la fuerza que el aparato realice sobre el flujo será la opuesta, es decir igual al peso conjunto de él y su carga. Esta fuerza es la que obrará en el balance macroscópico de cantidad de movimiento, a partir del cual puede obtenerse la velocidad de salida del flujo. La ecuación (7.12) proyectada sobre el eje z queda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho v_z dV + \int_{A_a \text{ eys}(t)} \rho v_z [(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{n}] dA \\ = - \int_{V_a(t)} \rho g dV + \int_{A_a \text{ no sól}(t)} -n_z p_m dA - (M + m) g \end{aligned}$$

Considerando estado estacionario, volumen de control fijo, flujos planos e incompresibles, presión atmosférica en todas las áreas de entrada y salida y peso despreciable del aire contenido en el volumen, tendremos:

$$-\rho v_s^2 A_s = - (M + m) g \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{(M + m) g}{\rho A_s}}$$

Del mismo modo, el planteo del balance macroscópico de masa a través de la (6.19) derivaría en la (6.21), es decir la igualdad de los caudales entrantes y salientes:

$$v_s A_s = v_e A_e = v_e \pi D h \Rightarrow v_e = \frac{v_s A_s}{\pi D h}$$

Por último, dado que el aerosustentador analizado posee una única entrada y una única salida, el planteo del balance macroscópico de energía para la determinación de la potencia del soplador interior, puede hacerse a partir de la expresión (9.14):

$$- \dot{w}_{eje} = \Delta \left(\frac{v_m^2}{2g} + z_c + \frac{p}{\rho g} + \hat{u}_m \right)$$

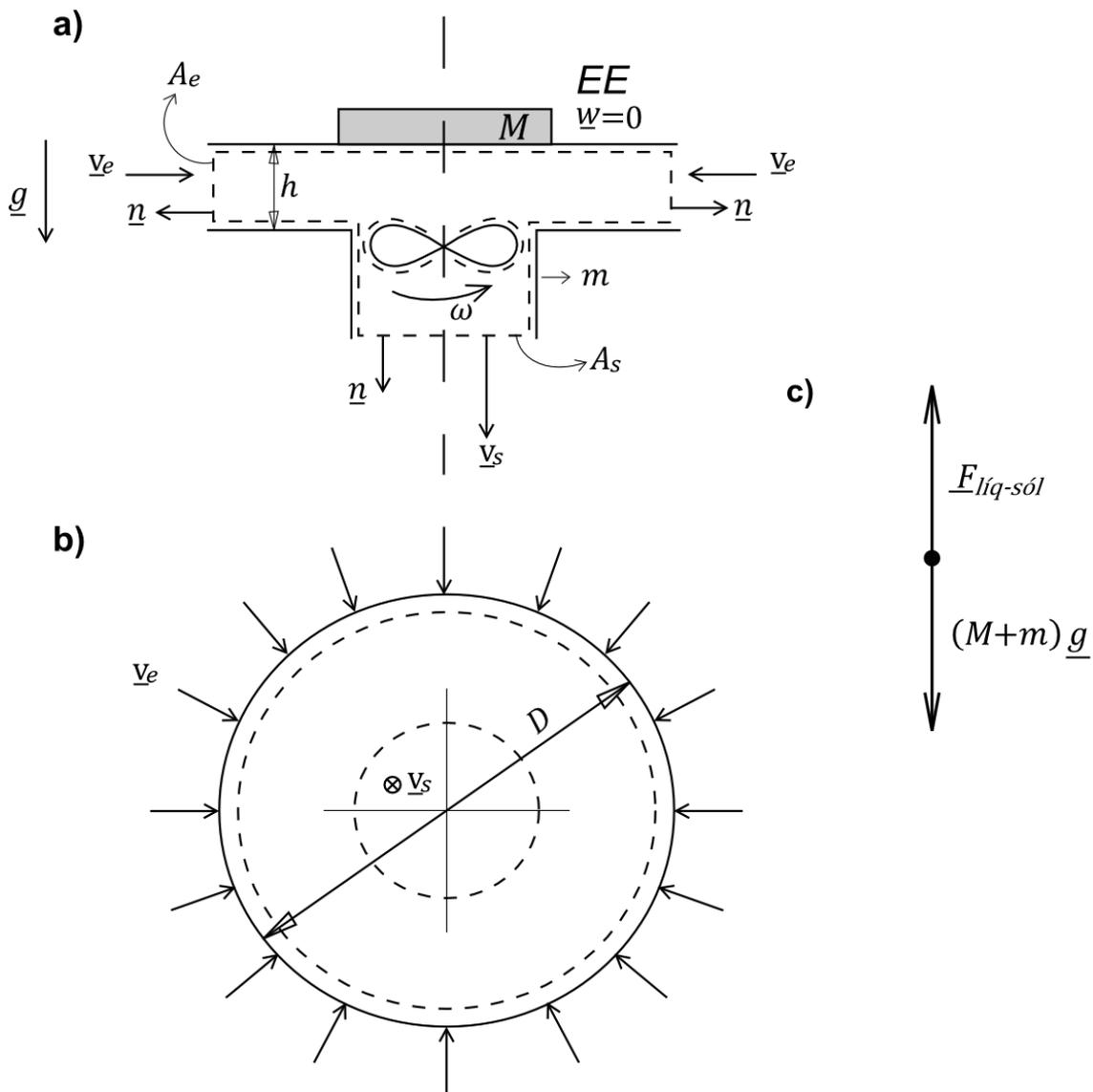


Figura 9.4: Esquema de un aerosustentador; a) vista lateral, b) vista superior, c) diagrama de cuerpo aislado del aparato funcionando.

Considerando despreciables las variaciones de energía potencial gravitacional debido a la baja densidad del aire, presiones atmosféricas entre la entrada y la

salida y una pérdida de carga proporcional a la energía cinética de salida, tendremos:

$$- \dot{W}_{eje} = \Delta \left(\frac{v_s^2}{2g} - \frac{v_e^2}{2g} + K \frac{v_s^2}{2g} \right) = \frac{v_s^2}{2g} \left[1 + K - \left(\frac{A_s}{\pi D h} \right)^2 \right]$$

La última expresión nos da la potencia del soplador en unidades de metros. El coeficiente K puede ser tomado como un parámetro a ajustar, mientras que el paréntesis es mucho menor que uno. Para tener dicha potencia en Watt, debemos multiplicar miembro a miembro la expresión por el flujo en peso de fluido:

$$- \dot{W}_{eje} = \frac{v_s^2}{2g} \left[1 + K - \left(\frac{A_s}{\pi D h} \right)^2 \right] \rho g A_s v_s$$

En términos de los datos:

$$- \dot{W}_{eje} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{(M + m) g}{\rho A_s}} \right]^3 \left[1 + K - \left(\frac{A_s}{\pi D h} \right)^2 \right] \rho A_s$$

Este puede ser un primer análisis de un diseño de aerosustentador, fundamentado en los balances que gobiernan el flujo de fluido en su interior. Si bien el entendimiento es idealizado, constituye una primera aproximación sobre el cual puedan realizarse suposiciones más realistas o, incluso, construir los primeros prototipos.

9.7 El balance de energía mecánica y la ecuación de Bernoulli

La ecuación (9.14) suele llamarse ecuación de Bernoulli en algunos ámbitos ingenieriles. Esto no es correcto ya que la ecuación (9.14) es aplicable a un espacio macroscópico mientras que la ecuación de Bernoulli lo es en un espacio diferencial, clásicamente un tubo de corriente donde no hay pérdidas de carga ni maquinaria intercambiando trabajo con el flujo. De hecho, la ecuación de Bernoulli puede obtenerse de la ecuación (9.14) cuando ésta se plantea en un volumen arbitrario, sin bombas ni turbinas y sin fricción, es decir, para flujos invíscidos. Por ello deviene la confusión, porque los casos aludidos involucran una buena cantidad flujos de aire y algunos flujos de agua en pequeñas escalas.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) ¿El volumen arbitrario para el planteo del balance de energía mecánica, es fijo o móvil?
- 2) ¿De dónde surge qué en el balance de energía mecánica por unidad de tiempo, la potencia de una bomba presente en el volumen arbitrario de análisis, se exprese con un número negativo y, al contrario, si se trata de una turbina?
- 3) ¿Cómo se define la energía mecánica específica por unidad volumen?
- 4) ¿Por qué en el balance de energía mecánica por unidad de tiempo, sólo aparece el trabajo de las fuerzas de contacto a través de las áreas que rodean el volumen de control?
- 5) ¿Cuáles son las condiciones simplificadorias para las cuales se desarrolla el balance?
- 6) ¿Por qué se desprecia el trabajo por unidad de tiempo realizado por las tensiones normales viscosas en las áreas de entrada y salida? ¿Cuánto vale el realizado por las tensiones viscosas tangenciales en dichas áreas?
- 7) ¿Por qué el trabajo por unidad de tiempo realizado sobre las superficies móviles se asume en su totalidad y no se expresa como una integral?
- 8) Obtenga el flujo de energía cinética por unidad de tiempo de un flujo que atraviesa una sección recta de un tubo de radio R , con una distribución de velocidades parabólica del tipo $V(r) = V_{m\acute{a}x} [1-(r/R)^2]$. ¿Qué factor de corrección debería usarse si el cálculo se hiciese con la velocidad media del flujo?
- 9) ¿Cuáles son las premisas por las cuales se llega a la expresión del balance de energía mecánica por unidad de tiempo en unidades intensivas, cuando hay una única entrada y una única salida?
- 10) ¿Qué signo tiene la variación de energía interna por unidad de tiempo de un flujo entre dos estados energéticos? ¿Qué significa dicha variación?
- 11) Suponga una instalación de conducción e impulsión de fluido en la superficie de la Tierra y luego supóngala en el espacio, en condiciones de ingravidez. Si, en ambos casos, la bomba comunica al flujo la misma potencia, ¿cómo se compensará la misma?
- 12) ¿Puede el balance de energía mecánica por unidad de tiempo en unidades intensivas, llamarse ecuación de Bernoulli?

Página intencionalmente en blanco.

CAPITULO

10

Análisis Dimensional y Similitud

10.1 Introducción

El desarrollo de la Mecánica de los Fluidos –y la Física en general- ha sido posible gracias al aporte de la experimentación y soluciones teóricas de problemas conocidos. Usualmente entre la teoría y la experimentación se produce un lazo iterativo donde, a partir de la observación experimental, se aíslan fenómenos reproducibles en el laboratorio y se proponen modelos teóricos. Estos modelos arrojan luego predicciones de dichos fenómenos para situaciones nuevas, predicciones que deben confirmarse con nuevas experimentaciones, de lo contrario deben modificarse las propuestas teóricas. Este no es más que el método experimental establecido por Galileo Galilei hace casi 400 años.

El análisis teórico es esencial para diseñar y dirigir experimentos, y una vez validados los resultados analíticos, el modelo teórico se constituye en una herramienta valiosa para predecir y por lo tanto comprender, fenómenos del mismo género, sobre todo cuando son de difícil observación experimental.

Dado que el trabajo experimental es costoso en tiempo y dinero, es necesario obtener de éste la mayor cantidad de información. Existe una forma de generalizar pocos experimentos a una amplia variedad de fenómenos del mismo tipo pero en diferentes escalas geométricas y dinámicas. Este hecho es fundamental para ensayar un prototipo a través de un modelo, ya sea a escala menor –que es lo más usual- o un modelo a escala mayor.

En este capítulo, revisaremos las herramientas que provee el análisis dimensional para luego aplicarlas fundamentalmente al modelado y cálculo de las pérdidas de carga en tubos rectos de sección circular por el que circula un líquido. Antes que ello definiremos matemáticamente como "dimensión" (magnitud en Física) a todo aquello que puede medirse y definiremos "unidad", al patrón de medida de la dimensión, que siempre se funda en una convención. Por ejemplo, la dimensión "longitud" posee una unidad de medida que es el "metro" en el sistema internacional.

10.2 El análisis dimensional

Existen fenómenos físicos donde, hasta tanto se teorice, las variables gobernantes se relacionan entre sí de una manera compleja y desconocida que sólo puede representarse matemáticamente como una funcionalidad implícita. Por ejemplo, el módulo de la fuerza de arrastre que ejerce un flujo libre sobre un cuerpo esférico como se ve en la figura 10.1, depende de la rapidez del flujo, del diámetro de la esfera y de la densidad y la viscosidad del fluido. Sin perjuicio de la posibilidad -actual- que se tiene de modelar teóricamente dicho fenómeno, expresaremos una funcionalidad implícita para fundamentar la necesidad del análisis dimensional. Podríamos decir entonces que:

$$F = f(V, D, \rho, \mu) \tag{10.1}$$

donde cada variable posee dimensiones, es decir: un valor y una unidad de medida.

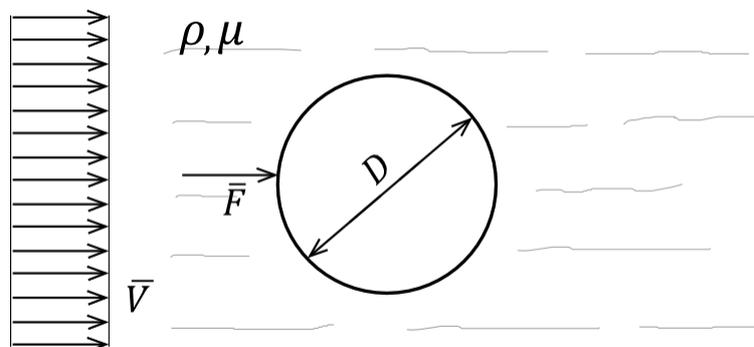


Figura 10.1: Fuerza de arrastre sobre una esfera producida por un flujo libre.

Si quisiésemos obtener experimentalmente la relación que existe entre la intensidad de la fuerza de arrastre y el resto de las variables, deberíamos tomar mediciones de F variando por ejemplo la velocidad del flujo y manteniendo constante el resto de las variables. Si variásemos 10 veces V para un dado valor de D , ρ y μ , deberíamos repetir la experiencia variando D , por ejemplo, otras nueve veces. Así tendríamos 10 gráficas de F en función de V para 10 valores distintos de D . A su vez, ρ y μ , también deberían tomar distintos valores, por

ejemplo, para tener un panorama bastante amplio de la dependencia de F . En definitiva y para estos supuestos, cada variable debería tomar 10 valores para cada uno de los valores de las variables restantes. Ello implicaría la necesidad de realizar 10^4 experimentos ¹, que derivarían en 10^3 gráficas o tablas. Algo imposible de almacenar y utilizar eficientemente. La figura 10.2 muestra una posible gráfica de $F=f(V)$ y, en un arreglo cúbico, las mil gráficas que habría debido a las 10 variaciones de D , ρ y μ .

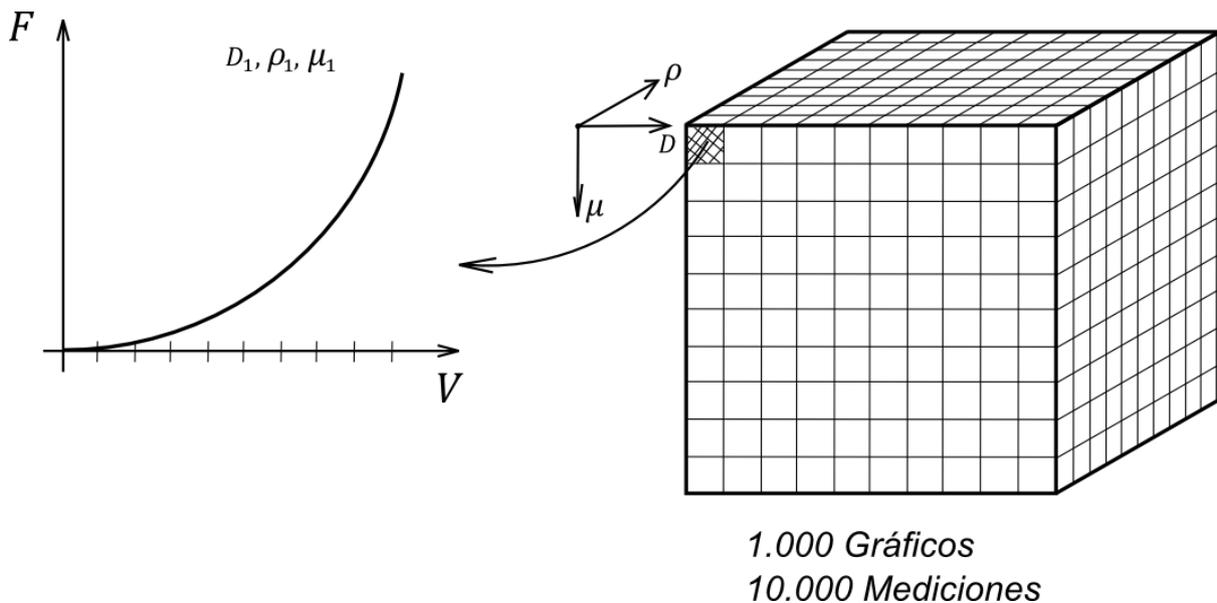


Figura 10.2: Esquema de la cantidad de gráficos y mediciones que habría que realizar conduciendo el experimento a través de las variables dimensionales. Se suponen 10 variaciones de cada una.

Afortunadamente, las relaciones como la (10.1) pueden expresarse como relaciones funcionales implícitas entre menos variables, pero "adimensionales", también llamadas grupos adimensionales. Las variables adimensionales se caracterizan por tener un valor numérico y ninguna unidad de medida, por ello, también se las refiere como "números adimensionales". En este caso, se demuestra que la (10.1) puede expresarse así:

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = g\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) \quad (10.2)$$

Realizando el experimento, pero guiado por la expresión (10.2), sólo con 10 experimentos ² podría obtenerse una gráfica donde los resultados se expresen en términos de las variables adimensionales. Cada punto correspondería a muchas situaciones dimensionales cuya relación adimensional, en términos de la ecuación (10.2), tenga los mismos valores numéricos. Es decir: dos flujos de

¹ Debe aclararse que para obtener con la mayor exactitud y precisión el valor más probable de la variable medida en una experiencia, no basta una sola medición como se ha supuesto, sino un gran número de repeticiones, es decir, una serie.

² Entiéndase esto en el contexto del ejemplo y solo para comparación.

CAPITULO 10: ANALISIS DIMENSIONAL Y SIMILITUD

distintos fluidos, con distintas velocidades, impactando sobre esferas distintas, pueden estar representados por el mismo punto en la gráfica adimensional si las relaciones numéricas que propone la (10.2) son del mismo valor en ambos casos. Esto se muestra en la figura 10.3.

Se destaca que la variable adimensional del segundo miembro de la (10.2) es muy característica en los flujos de fluidos porque relaciona las fuerzas de inercia (se le llama así al término de masa por aceleración) con las fuerzas viscosas y su valor numérico suele dar una idea del tipo de flujo. Posee un nombre que lo caracteriza, se denomina "número" de Reynolds y se simboliza Re , importa su valor numérico para caracterizar un flujo; generalmente valores superiores a 2000 son representativos de flujos turbulentos. Por el contrario, valores por debajo de 2000 corresponden a flujos laminares.

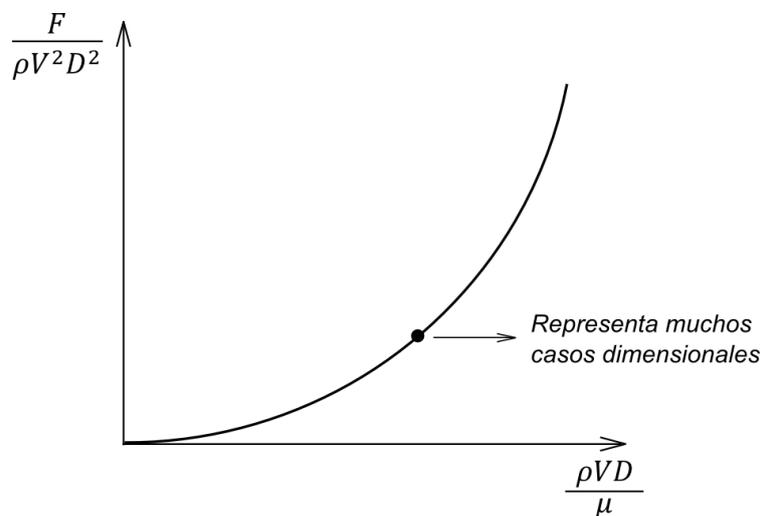


Figura 10.3: Gráfica única adimensional para el fenómeno de arrastre sobre la esfera de la figura 10.1. Cada punto de la curva representa muchos casos dimensionales similares.

En la bibliografía y por lo que se ha dicho precedentemente, se suele hablar de "número" en vez de "variable" adimensional porque, como veremos más adelante, importa el valor numérico de estas variables para establecer condiciones de similitud entre flujos del mismo tipo en diferentes escalas: geométricas, cinemáticas y dinámicas.

Del mismo modo que la variable adimensional denominada Reynolds, hay otras que aparecen con frecuencia en la descripción adimensional de flujos. Todas relacionan fuerzas de distinta índole y de a pares. Pueden mencionarse, entre otros, los "números" de Euler, de Froude, de Weber y el denominado número capilar. Estos son respectivamente:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2}, \text{ relaciona fuerzas de presión con fuerzas de inercia}$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g L}}, \text{ relaciona fuerzas de inercia con fuerzas de gravedad}$$

$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$, relaciona fuerzas de inercia con fuerzas capilares

$Ca = \frac{\mu V}{\sigma}$, relaciona fuerzas viscosas con fuerzas capilares

En el próximo ítem presentaremos la regla analítica para pasar de funciones implícitas entre variables dimensionales a funciones implícitas entre variables adimensionales, aplicándola a la obtención de la expresión (10.2) a partir de la (10.1).

10.3 Teorema Π de Buckingham

En este ítem sólo presentaremos la tesis del teorema de Buckingham para no abundar en aspectos matemáticos que escapan al motivo de este curso.

Supongamos una relación implícita entre ' n ' variables dimensionales:

$$q_1 = f(q_2, q_3, q_4, \dots, q_n) \quad (10.3)$$

La que puede escribirse como:

$$\hat{f}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad (10.4)$$

Si ' m ' representa la cantidad de dimensiones fundamentales, en Mecánica son masa (M), longitud (L) y tiempo (T) para el sistema internacional (en el sistema inglés las dimensiones fundamentales son fuerza, longitud y tiempo), la funcionalidad (10.4) puede escribirse como una función implícita entre ' $n-m$ ' variables adimensionales independientes, denominadas Π . Es decir:

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}) = 0 \quad (10.5)$$

Que las variables adimensionales Π_i sean independientes, significa que ninguna de ellas puede obtenerse por relaciones funcionales de las otras.

Debe decirse además que, $n-m$ debe ser mayor o igual a dos para que tenga sentido la aplicación del teorema. Asimismo, y como Ud. debe estar sospechando, una relación adimensional entre más de tres variables Π también presenta problemas para su representación gráfica. Dado el caso de tener más de tres variables adimensionales, pueden despreciarse aquellas que, con algún criterio experimental, se determine que su influencia en los resultados sea relativamente baja.

10.3.1 Determinación de las variables adimensionales Π

La metodología que aquí se expondrá, a modo de secuencia operativa, es el resultado del teorema de Buckingham que data de 1914. Dado que la secuencia

es eminentemente operativa, por claridad, la presentaremos aplicada a la ecuación (10.1). Esto es:

- 1) *Enlistar todas las variables dimensionales implicadas en el fenómeno físico a reproducir experimentalmente, ello nos dará el número 'n'. Para la ecuación (10.1) estas variables son: F, V, D, ρ y μ .*
- 2) *Determinar las dimensiones fundamentales o "primarias" de las variables dimensionales referidas a nuestro sistema de medidas –el internacional (SI)-, ello implica determinar 'm'. Para las variables de la ecuación (10.1) tenemos: masa, longitud y tiempo, es decir, las tres dimensiones básicas para los fenómenos fluidodinámicos sin transferencia de calor a los que nos hemos circunscriptos en el capítulo anterior (ver ítem 9.2).*
- 3) *Enlistar todas las dimensiones de las variables dimensionales en términos de las dimensiones fundamentales. Para las variables de la ecuación (10.1) tenemos:*

$$F [M L/T^2], V [L/T], D [L], \rho [M/L^3], \mu [M/(L T)].$$

- 4) *Seleccionar 'm' variables dimensionales, estas se llamarán repetitivas porque participarán en todas las variables adimensionales. Entre ellas deben aparecer las 'm' dimensiones fundamentales. No debe elegirse como variable repetitiva a una variable que es entendida como dependiente, por ejemplo, la fuerza de arrastre sobre la esfera. Tampoco deben elegirse a la vez, variables cuyas dimensiones consten únicamente de una única dimensión primaria, por ejemplo: dos longitudes, una longitud y un momento de inercia de un área (ambas se expresan con la dimensión longitud, L y L^2) o un momento de torsión y una energía (ambas poseen unidades Nm , es decir dimensiones $M L^2/T^2$). Nótese que de acuerdo al grupo de variables repetitivas que se elijan, serán las variables adimensionales finales. Para el caso de la ecuación (10.1) tomaremos como variables repetitivas a ρ, V y D .*
- 5) *Establecer ecuaciones dimensionales para cada dimensión primaria, multiplicando las variables repetitivas elegidas en 4) y elevadas a exponentes desconocidos, con cada una de las variables restantes. Resolver para obtener los exponentes desconocidos y crear los $n-m$ grupos adimensionales.*
- 6) *Comprobar que cada grupo o variable adimensional carece de dimensiones.*

La aplicación del paso 5) al problema que establece la ecuación (10.1) implica plantear la siguiente ecuación para la primera variable adimensional:

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F \Rightarrow M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b L^c \left(\frac{M L}{T^2}\right) \quad (10.6)$$

Los exponentes a , b y c desconocidos se determinan del sistema de ecuaciones que genera la ausencia de dimensiones a ambos lados de la expresión adimensional (10.6). Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} M: 0 = a + 1 \\ L: 0 = -3a + b + c + 1 \\ T: 0 = -b - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1, \quad b = -2, \quad c = -2 \Rightarrow \Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2} \quad (10.7)$$

Para la segunda variable adimensional, siguiendo los mismos pasos pero nombrando con otros símbolos a los exponentes –para evitar confusiones–, se tendrá:

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu \Rightarrow M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{T}\right)^e L^f \left(\frac{M}{LT}\right) \quad (10.8)$$

$$\left. \begin{array}{l} M: 0 = d + 1 \\ L: 0 = -3d + e + f - 1 \\ T: 0 = -e - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow d = -1, \quad e = -1, \quad f = -1 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} \quad (10.9)$$

Debe decirse que la variable Π_2 es el inverso de Re , sin embargo, es fácil notar que el inverso de cualquier variable adimensional es también una variable adimensional, con lo cual podemos reconstruir la (10.2), así:

$$\Pi_1 = G(\Pi_2) \Rightarrow \Pi_1 = \hat{G}\left(\frac{1}{\Pi_2}\right) \Rightarrow \frac{F}{\rho V^2 D^2} = \hat{G}\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) \quad (10.10)$$

10.4 Similitud de flujos y experimentación sobre modelos

Hemos visto en el ítem 10.2 que un experimento guiado y expresado en su formulación adimensional, tiene aplicación a muchos casos dimensionales. En la figura 10.3 se ve como un punto de la gráfica es representativo de muchos casos de arrastre sobre un cuerpo esférico. Por lo tanto, todos esos casos se dice que son “similares”, porque están gobernados por las mismas variables adimensionales y éstas poseen los mismos valores numéricos en todos ellos. La similaridad es de suma importancia en Física porque permite observar, ensayar y analizar, un caso “prototipo” a través de un caso “modelo”. Si bien en la actualidad se dispone de enormes recursos computacionales que permiten simular teóricamente un determinado fenómeno natural o tecnológico, las aproximaciones (simplificaciones) que se realizan a fin de que los modelos sean resolubles no siempre muestran en su totalidad la interrelación entre las variables que gobiernan dicho fenómeno. Cuando el caso prototípico es de grandes dimensiones, por ejemplo, un buque, un avión o una turbina hidráulica, la posibilidad de ensayo experimental es inexistente, con lo cual la experimentación sobre modelos es absolutamente útil y necesaria para “observar” realmente el

fenómeno. Lo mismo valdría para los casos de prototipos de muy pequeñas dimensiones.

El modelo debe cumplir con una relación de escala respecto al prototipo de modo de asegurar similitudes geométrica, cinemática y dinámica. Podríamos decir que, para llegar a un producto final, la secuencia es: simulación computacional, experimentación sobre modelos a escala, producción del primer prototipo y pruebas finales sobre el prototipo.

La similitud geométrica garantiza que el prototipo y el modelo sean de la misma forma y todas sus dimensiones correspondientes se relacionen por un factor de escala constante. Esta escala puede ser mayor o menor que uno cuando queremos construir modelos más pequeños que el prototipo, o más grandes respectivamente.

La similitud cinemática implica que velocidades en puntos correspondientes entre modelo y prototipo, se relacionen por un factor de escala constante. Si ello ocurre, los patrones de líneas de corrientes serán similares y dado que las fronteras forman las líneas de corriente límites, la similitud cinemática implica la similitud geométrica.

La similitud dinámica, a su vez, requiere que campos de fuerzas sobre modelo y prototipo posean una relación a través de un factor de escala constante. Esta similitud es la más restrictiva y difícil de asegurar, ya que deben tenerse en cuenta absolutamente todas las fuerzas implicadas en el fenómeno: por presión, por tensión superficial, por gravedad, etc.

Para determinar los parámetros físicos y operativos de la experiencia con el modelo, debe plantearse el hecho sine qua non de que las variables adimensionales tengan el mismo valor en ambos casos. En el ejemplo que venimos tratando del arrastre sobre el cuerpo esférico, ello demandaría que:

$$\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_{\text{MODELO}} = \left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_{\text{PROTOTIPO}} \quad (10.11)$$

$$\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{MODELO}} = \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{PROTOTIPO}} \quad (10.12)$$

Si podemos decidir la escala geométrica y el tipo de fluido a utilizar, de las expresiones (10.11) y (10.12) surgirán las escalas cinemáticas y dinámicas. En el caso en análisis solo dos parámetros pueden quedar desconocidos para obtener su valor a partir de las igualdades anteriores. Por ejemplo, si el modelo va a tener un diámetro 10 veces menor y el fluido será el mismo, en la experiencia deberemos aumentar 10 veces la velocidad del flujo libre, resultando la fuerza medida sobre el modelo de igual valor a la que actuará en el prototipo ³.

³ Realizar experiencias sobre modelos, en algunos casos requiere instalaciones experimentales muy costosas que solo la envergadura de grandes proyectos la justifican. Por ello, y a fin de matizar lo aquí discutido, se anima al lector a ver los videos disponibles en internet, identificando que provengan de instituciones de relevancia.

En fenómenos gobernados por varios grupos adimensionales, no siempre es posible satisfacer el requerimiento de igualdad de valores en el modelo y en el prototipo. En ese caso y con algún criterio válido, habrá que decidir qué relaciones entre parámetros del modelo y el prototipo relajar para hacer posible la experiencia y que ésta sea válida.

10.5 Adimensionalización de ecuaciones explícitas

Otra manera de determinar fehacientemente las variables adimensionales que gobiernan un determinado fenómeno, es adimensionalizando las ecuaciones diferenciales básicas y las condiciones de contorno e iniciales que se requieran. Dos fenómenos similares tendrán la misma forma adimensional de las ecuaciones diferenciales y sus condiciones de borde e iniciales. El procedimiento de adimensionalización de una ecuación explícita no es otra cosa que un cambio de variables utilizando constantes dimensionales. Por ejemplo, para pasar de una velocidad dimensional a una adimensional, se divide la primera por una velocidad que, si es propia del flujo estudiado, se dice que es característica. Siempre debe buscarse que las constantes elegidas sean características.

Más allá del argumento anterior, orientado a la experimentación en laboratorio, la adimensionalización de ecuaciones diferenciales básicas persigue un concepto economicista para la solución de las mismas. Es decir, la solución de una ecuación diferencial en variables dimensionales corresponde a un caso dimensional para el cual se les ha dado un valor a todos los parámetros físicos y operativos, en cambio, la solución de la misma ecuación adimensionalizada, es válida para todos los casos dimensionales para los cuales el valor numérico de los grupos adimensionales es el mismo que el utilizado para obtener la solución. Más aún, desde el punto de vista computacional, el uso de constantes características hace que las variables adimensionales sean de orden 1, lo cual posee ventajas de convergencia para los algoritmos que deben ajustar sus incógnitas con el mismo error. De otro modo, un mismo algoritmo puede no converger por la dificultad de ajustar incógnitas de muy distinto orden de magnitud.

Por último, si las variables adimensionales son de orden 1, el peso relativo de cada término en una ecuación, se transfiere al valor numérico del grupo adimensional que afecta a cada término. Con esto se simplifica el análisis de órdenes de magnitud para simplificar las ecuaciones finales. Seguidamente trataremos un ejemplo.

10.5.1 Adimensionalización de la ecuación de Navier-Stokes

Podríamos decir que en la caracterización extrema de flujos como puramente viscosos o totalmente invíscidos, las fuerzas de presión se equilibran de distinta forma. En el primer caso con las fuerzas viscosas y en el segundo caso, con las fuerzas inerciales (el término masa por aceleración). Por esta razón tenemos dos formas de adimensionalizar la ecuación de Navier-Stokes en función del tipo de flujo a modelar, en un caso la presión podrá adimensionalizarse con un esfuerzo de corte característico y, en el otro, con una "tensión" inercial característica. En

los casos intermedios habrá que decidir cuál es la particularidad prominente del flujo para adimensionalizar la presión.

Adimensionalicemos primero, variables adimensionales con constantes características de un flujo viscoso, es decir, de aspecto laminar. Optando por una velocidad característica V y una longitud característica L , pueden a partir de ellas adimensionalizarse todas las otras variables. Convengamos, además, que los parámetros materiales, si son constantes, no se adimensionalizan porque formarán parte de los grupos adimensionales que surjan. Luego:

$$\underline{v}^* = \frac{v}{V}, \quad t^* = \frac{t}{L/V}, \quad \underline{\nabla}^* = \underline{\nabla} L, \quad p^* = \frac{p}{\mu V/L}$$

Reemplazando en la ecuación (8.15) y operando, se tiene:

$$\frac{\rho V L}{\mu} \left(\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial t^*} + \underline{v}^* \cdot \underline{\nabla}^* \underline{v}^* \right) = \frac{\rho L^2 g}{\mu V} \underline{k} - \underline{\nabla}^* p^* + \nabla^{*2} \underline{v}^*$$

O lo que es lo mismo

$$Re \left(\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial t^*} + \underline{v}^* \cdot \underline{\nabla}^* \underline{v}^* \right) = Sn \underline{k} - \underline{\nabla}^* p^* + \nabla^{*2} \underline{v}^* \quad (10.13)$$

Para flujos puramente viscosos $Re \rightarrow 0$, con lo cual el primer miembro de la (10.13) puede ser despreciado. Notar que el término entre paréntesis es de orden 1.

Por otra parte, la adimensionalización de la (8.15) para flujos de muy baja viscosidad, demanda que la presión -a diferencia de lo anterior- se adimensionalice como:

$$p^* = \frac{p}{\rho V^2}$$

Para dar la forma final adimensional:

$$\left(\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial t^*} + \underline{v}^* \cdot \underline{\nabla}^* \underline{v}^* \right) = \frac{1}{(Fr)^2} \underline{k} - \underline{\nabla}^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \underline{v}^* \quad (10.14)$$

Para flujos de muy baja viscosidad, Re tiende a infinito con lo que el último término del segundo miembro puede despreciarse.

10.6 Flujos externos: conceptos básicos sobre Capa Límite

Si bien este es un tema que puede abordarse analíticamente desde las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos, donde varios ejemplos específicos poseen solución cerrada y otros pueden estudiarse vía métodos computacionales, todavía hoy la comprensión del fenómeno de la capa límite requiere

procedimientos experimentales. Por este motivo, hemos elegido ubicar en este capítulo los conceptos básicos relacionados al tema.

La fuerza de acción aerodinámica (o hidrodinámica) que sufren los cuerpos interactuando con un flujo libre, posee dos razones: las fuerzas viscosas y las diferencias de presión (la razón más importante) sobre la superficie del cuerpo. Dicha fuerza posee una componente en la dirección del flujo, que produce el "arrastre" del cuerpo, y otra componente perpendicular al flujo, que produce la "sustentación" del cuerpo.

Hasta 1904, estos fenómenos no podían estudiarse teóricamente porque no podía resolverse analíticamente la ecuación de Navier-Stokes, que contiene las fuerzas de origen viscoso. En cambio, sí podía resolverse la simplificación de ésta que se obtiene despreciando los términos viscosos en la versión conocida con el nombre de Euler. Sin embargo, los resultados eran carentes de sentido físico pues dichas soluciones no predecían fuerza de arrastre y tampoco de sustentación.

El aerodinamista alemán Ludwig Prandtl introdujo entonces el concepto de "capa límite", como aquella región lindante al objeto dentro del flujo en la cual se manifiestan los fenómenos viscosos que surgen por el contacto del fluido con el sólido, específicamente por la condición de no deslizamiento. Esta interacción, aún para fluidos de viscosidades muy pequeñas (típicamente el aire), es muy importante en las inmediaciones de la superficie del cuerpo y no debe despreciarse. Fuera de la capa límite, el flujo sigue su curso libremente como si el objeto no existiese en su seno y, por lo tanto, su dinámica responde a las ecuaciones de Euler. El concepto establecido por Prandtl, hizo posible el modelado teórico del problema y el logro de soluciones analíticas para varios casos arquetípicos, como por ejemplo el de una placa plana en contacto con un flujo libre semi-infinito como muestra la figura 10.4.

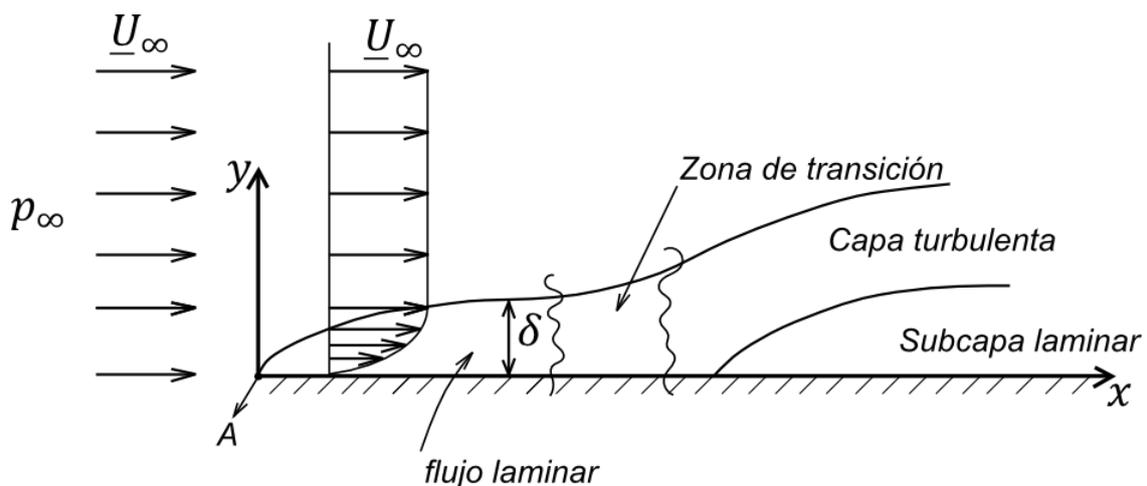


Figura 10.4: Capa límite generada por un flujo libre semi-infinito sobre una placa plana.

La teoría derivada del concepto de capa límite y las soluciones analíticas logradas para ciertos casos, dio lugar a un entendimiento del fenómeno del arrastre y la

sustentación que revolucionó la aerodinámica y también la hidrodinámica. Con posterioridad, ello se vio reflejado en la inédita performance que, para la época, tuvieron los aviones y los buques de guerra de la Alemania Nazi. Suele decirse que, si aquellos alemanes hubieran contado con computadoras, el resultado de la segunda guerra mundial podría haber sido otro.

En la figura 10.4 se ve la formación de una capa límite cuyo espesor es a priori desconocido, variable y definido como aquella distancia en la que la velocidad del flujo dentro de la capa límite es 0,99 de la velocidad del flujo libre (U_∞). El conocimiento del espesor de la capa límite es esencial porque marca los límites de la interacción sólido-fluido. Idealmente, se requiere que la capa límite sea lo más delgada posible y se encuentre adherida a la superficie sólida en la mayor parte de la misma para minimizar el arrastre. Si la capa límite estuviese pegada sobre toda la superficie del cuerpo, las líneas de corriente confluirían detrás del objeto evitando la depresión relativa respecto al frente de ataque que da lugar a la parte más importante del arrastre.

10.6.1 Modelo en ecuaciones del flujo en la capa límite

Dentro de la capa límite el flujo es preponderantemente viscoso, pero también son importantes los efectos inerciales sobre todo cuando la velocidad del flujo se acerca a la del flujo libre.

Hasta en los casos más sencillos, como por ejemplo el mostrado en la figura 10.4, el flujo en el interior de la capa límite es al menos bidimensional, donde las incógnitas a resolver son usualmente las componentes de la velocidad y la presión. Para un flujo newtoniano e incompresible, el modelo estará dado por las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuación 8.15) y continuidad (ecuación 6.14). Es decir:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \right) = \rho \underline{g} - \underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{v}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

Debe tenerse en cuenta que las condiciones de borde para la velocidad –suponiendo como hasta ahora un flujo libre y un sólido en reposo– son: no deslizamiento sobre la superficie sólida; velocidad tendiente a la del flujo libre y pendiente nula de la velocidad respecto a la dirección normal, sobre la línea que delimita el espesor de la capa límite. Matemáticamente, dicha posición sobre la dirección normal (la dirección y en la figura 10.4) se representa como el infinito. Así es, el espesor físico finito y más aún, pequeño, denominado δ , tiene la representación matemática de su extremo como una posición en el infinito (∞). En símbolos y para el caso de la figura 10.4:

$$\underline{v} = 0, \quad \forall x, \quad y = 0$$

$$\underline{v} = 0,99 U_{\infty}, \quad \frac{dv}{dn} = 0, \quad \forall x, \quad y \rightarrow \infty$$

En los denominados bordes de ataque como el A de la figura 10.4, la presión es una presión de estancamiento y puede obtenerse planteando la ecuación (9.14) sobre una línea de corriente que termine en A, asumiendo que no hay cambios de altura, que no hay trabajo entregado a través de un eje y tampoco pérdidas de carga (ver ítem 9.7). Es decir:

$$0 = \Delta \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} \right) \rightarrow (p_A - p_{\infty}) = \frac{\rho U_{\infty}^2}{2}$$

Soluciones analíticas del problema presentado en la figura 10.4 fueron obtenidas por los discípulos de Pandtl, Heinrich Blasius y Theodore von Kármán, pero trascienden los alcances de este libro.

10.6.2 Separación de la capa límite

La separación o desprendimiento de la capa límite se produce fundamentalmente sobre superficies sólidas curvas. La figura 10.5 muestra un cuerpo tipo ala de avión, donde el flujo se acelera en la superficie superior como consecuencia del estrechamiento del área que se produce debido al perfil que presenta su mayor altura en el punto C. Analizando el flujo, análogamente a la sección anterior, se ve que habrá una presión de estancamiento en el punto A y que luego la presión disminuirá alcanzando un mínimo en C, en el estrechamiento máximo. Después de C las áreas de paso aumentan desacelerando el flujo y aumentando la presión en la dirección del movimiento y oponiendo un gradiente adverso que, en un punto como el D, es capaz de detener el flujo en las inmediaciones del sólido y más adelante generar un ambiente propicio para el ingreso de un reflujo. Este flujo contrario es impulsado por la presión ambiental -aguas abajo- que es mayor que la presión en el punto D. Cuando esto ocurre, se dice que la capa límite se ha desprendido y la diferencia de presión entre el punto A y el D es la razón principal del arrastre al que queda sujeto el cuerpo.

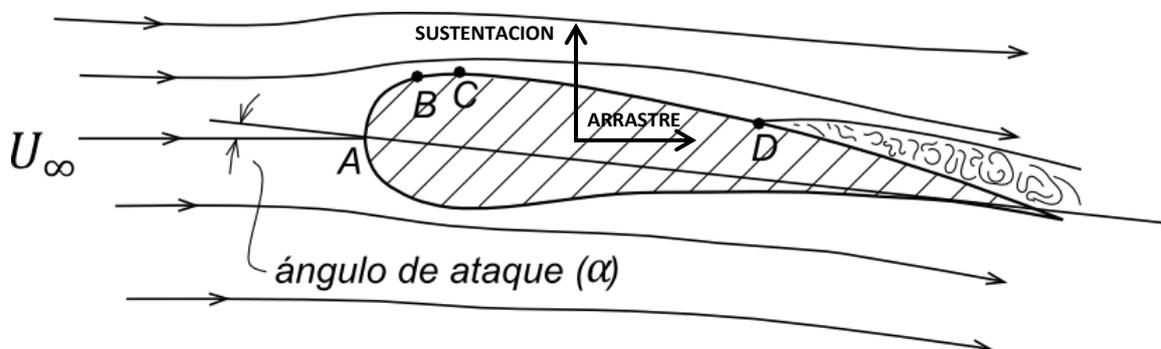


Figura 10.5: Cuerpo con formas curvas tipo ala de avión. Se ejemplifica el desprendimiento de la capa límite y se indican las fuerzas de arrastre y sustentación para un ángulo de ataque mayor que cero.

En la parte inferior del perfil tipo ala, debido a su forma asimétrica y a la posición con ángulo de ataque no nulo, se genera una distribución de presiones mayores a las de la parte superior que van a ser la principal causa de la fuerza de sustentación.

En la figura 10.6 se esquematizan los perfiles de velocidad dentro de la capa límite donde se ve que paulatinamente la pendiente del perfil sobre la superficie del cuerpo tiende a cero en la dirección normal a la misma. En el punto D dicha pendiente es cero y ello se establece como la condición de separación de la capa límite, es decir:

$$\left. \frac{dv}{dn} \right|_D = 0$$

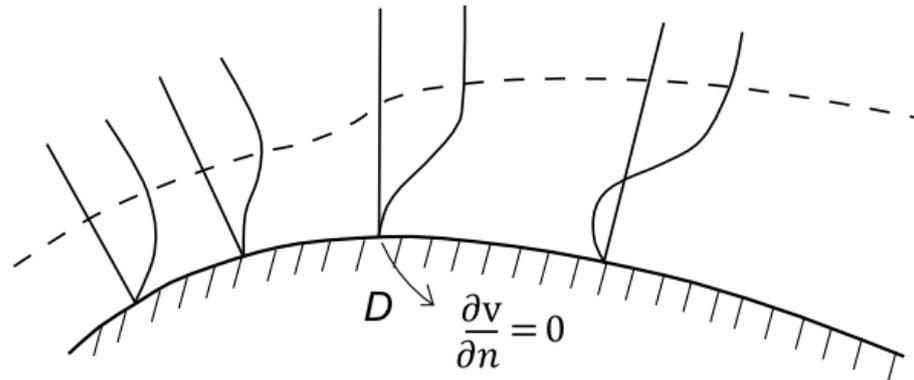


Figura 10.6: Perfiles de velocidades en la capa límite laminar antes y después de producirse la separación. En el punto de separación el perfil de velocidades tiene pendiente cero.

Clásicamente, tal condición se utiliza para encontrar analíticamente la ubicación del punto D . De otra manera, el punto de separación de la capa límite debe ser ubicado por métodos experimentales.

La figura 10.7 muestra un ala de avión con formas variadas entre el despegue y el aterrizaje para retrasar o adelantar, respectivamente, la posición del punto D .

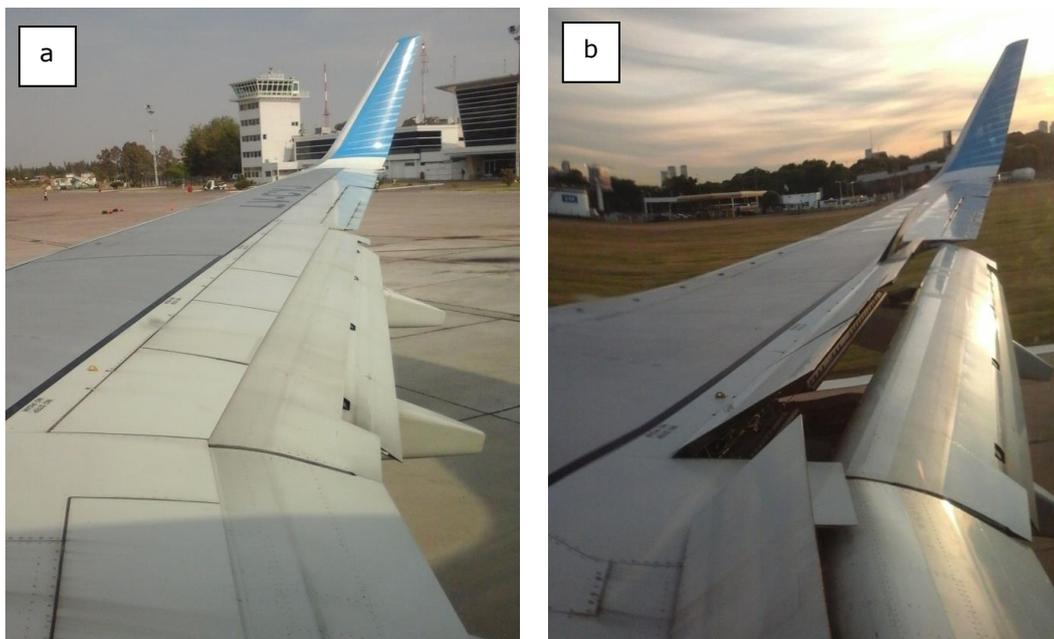


Figura 10.7: a) Partes móviles del ala de avión en posición óptima para el despegue: se promueve la adhesión de la capa límite. b) Partes móviles del ala de avión en posición óptima para el aterrizaje: se promueve la separación de la capa límite. Las fotografías pertenecen a la misma ala de un avión y fueron tomadas por el autor.

Es tarea principal de la aerodinámica encontrar las formas más adecuadas para evitar el despegue de la capa límite o bien retrasarlo lo más posible para disminuir el arrastre. Asimismo, que dichas formas sean óptimas para un buen rango de velocidades del flujo libre.

En el caso de los aviones, los flaps (solapas) de las alas son los encargados de variar la forma del ala para generar menor o mayor arrastre según se requiera en el despegue o en el aterrizaje. Lo inverso ocurre con la sustentación, que debe ser máxima en el despegue para la elevación y mínima en el aterrizaje para producir el descenso.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) ¿En qué idea clave se sustenta el análisis dimensional?
- 2) Suponga un gráfico adimensional entre una variable Π_1 y otra Π_2 , obtenido experimentalmente. ¿Qué representa cada punto de la curva que relaciona ambas variables adimensionales?
- 3) ¿Por qué a las variables adimensionales se las denomina comúnmente "números" adimensionales?
- 4) ¿Qué representa para un flujo el denominado número de Reynolds? ¿Qué significan sus valores extremos de cero e infinito?
- 5) ¿Qué demuestra el teorema Π de Buckingham?
- 6) ¿Cuántas y cuáles son las dimensiones fundamentales del sistema internacional para Mecánica?
- 7) Enumere los pasos de la tesis del teorema de Buckingham para hallar las variables adimensionales Π .
- 8) ¿Cuáles requisitos deben atenderse para seleccionar las variables repetitivas necesarias para implementar el teorema de Buckingham?
- 9) ¿En qué se basa la experimentación sobre modelos de casos reales?
- 10) Defina las similitudes geométrica, cinemática y dinámica.
- 11) ¿De acuerdo a qué criterio Ud. adimensionalizaría una ecuación explícita?
- 12) ¿Qué es una constante característica en un fenómeno físico?
- 13) ¿Cómo logra Ud. que las variables de una ecuación explícita adimensionalizada sean de orden 1?
- 14) Defina la capa límite y escriba un modelo en ecuaciones genérico.
- 15) Defina la separación de la capa límite y establezca la condición matemática para que ello ocurra.
- 16) ¿Por qué es importante que la capa límite no se separe?

Página intencionalmente en blanco.

CAPITULO

11

Flujos Viscosos: Pérdida de Carga

11.1 Introducción

Impulsar fluidos por conductos requiere vencer las resistencias al flujo que se producen por el rozamiento del fluido consigo mismo, fundamentalmente en las inmediaciones de las paredes que lo contienen. Tales superficies pueden ser tan lisas como se desee, pero la magnitud de las tensiones tangenciales que las mismas introducen al fluido para que adquiera la velocidad de la pared -nula en la mayoría de los casos-, producen fuertes disipaciones que transfieren energía mecánica en energía térmica. A ello, se le suma la resistencia al movimiento del fluido por el choque contra las protuberancias que presenta la rugosidad, que es tanto más importante cuanto más rugosa es la tubería.

El fenómeno es harto complejo dado que los flujos son en general turbulentos y las superficies de contacto con las paredes son matemáticamente indescriptibles. Por ello, circunscribiremos el análisis al flujo en tubos rectos de sección circular y utilizaremos las ventajas del análisis dimensional para -experimentalmente- dar solución a la evaluación de la energía perdida en la impulsión de flujos viscosos por cañerías.

La utilidad de este análisis es por sí elocuente ya que flujos impulsados a través de cañerías, hay en toda construcción civil o mecánica que nos podamos imaginar. De todas estas, las instalaciones de agua son quizás las más frecuentes.

11.2 Flujos internos: el fenómeno de la pérdida de carga en tubos rectos de sección circular

Supongamos un conducto recto de sección circular en posición horizontal como muestra la figura 11.1, por el que circula un flujo con una velocidad promedio V_m debido a una diferencia de presión.

El planteo del balance de energía en dicho volumen de flujo requiere establecer las variables en la ecuación (9.14). Esto es:

$$- \dot{w}_{eje} = \Delta \left(\frac{v_m^2}{2g} + z_c + \frac{p}{\rho g} + \hat{u}_m \right) ; \text{siendo } \Delta \hat{u}_m = h, \text{pérdida de carga}$$

donde solo subsisten los términos de variación de energía interna y el trabajo de flujo (a veces llamado energía de presión). A la variación de energía interna la comenzaremos a llamar "pérdida de carga", de modo que la expresión que queda de la 9.14, dado que no hay trabajo en el eje, variaciones de energía cinética y tampoco de energía gravitacional, es:

$$0 = \Delta \left(\frac{p}{\rho g} \right) + h_f \Rightarrow h_f = - \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\Delta p^*}{\rho g} \tag{11.1}$$

La expresión (11.1) nos dice que: la diferencia de presión requerida para hacer circular un flujo en las condiciones de la figura 11.1, se invierte totalmente en elevar la energía interna del flujo, en general evidenciada en un aumento de su temperatura en la sección de salida, respecto a la de entrada.

En el ítem anterior, decíamos que las tuberías pueden ser todo lo lisa que se desee o se "pueda", por lo que en general serán rugosas. El conocimiento de la rugosidad será de importancia en la evaluación de la pérdida de carga.

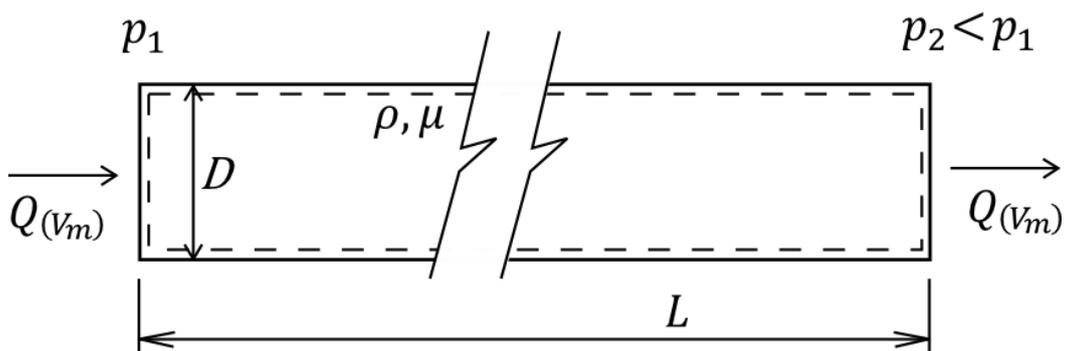


Figura 11.1: Tubo de sección circular constante en posición horizontal. Se requiere un gradiente de presión para hacer circular un caudal Q .

La figura 11.2 muestra un corte diametral de la pared de un tubo –en forma exagerada– como el de la figura 11.1, donde puede verse una ondulación característica de la pared interior para la cual se define la "rugosidad absoluta ε " como la distancia entre la cresta más alta y el valle más profundo. Es intuitivo

11.2 EL FENOMENO DE LA PERDIDA DE CARGA EN TUBOS RECTOS

pensar que la rugosidad no es importante en sí misma sino con relación al diámetro de la tubería, porque no es lo mismo una dada rugosidad absoluta en un tubo delgado que en un tubo grueso. Dicha variable depende del material del tubo y las características constructivas del mismo. Así: las tuberías de cemento o hierro fundido serán las más rugosas, mientras que las de acero extruido y polímeros, serán las más lisas.

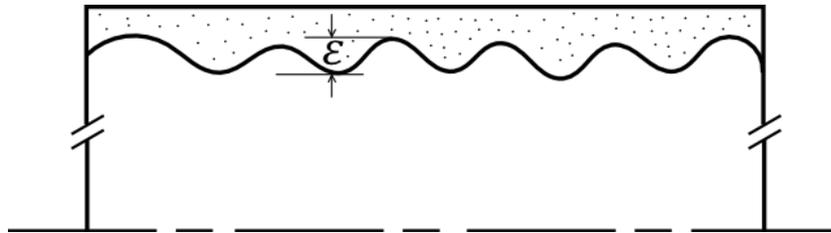


Figura 11.2: Corte diametral de un tubo donde se esquematiza -exageradamente- la rugosidad interior. Se indica la máxima distancia entre un valle y una cresta.

Queda claro entonces que la diferencia de presión necesaria para hacer circular un flujo por un conducto como el considerado, dependerá al menos de: el diámetro del tubo, no es lo mismo impulsar un caudal dado por un tubo fino que por uno grueso; la longitud del tubo, porque es más dificultoso transportar un mismo caudal por un tubo largo que por uno corto; la viscosidad del fluido, porque no es lo mismo transportar agua que aceite por ejemplo; la densidad, porque es distinto impulsar agua que algún metal fundido por ejemplo; la rugosidad absoluta (siempre referida a tubos nuevos) y la velocidad media del flujo – es decir el caudal-, ya que es distinto transportar un caudal por un tubo que transportar el doble o la mitad de él. Como la dependencia de la diferencia de presión necesaria entre los extremos del tubo es compleja y por lo tanto desconocida, se planteará dicha relación implícitamente:

$$\Delta p^* = \phi (D, L, \mu, \rho, \varepsilon, V_m) \quad (11.2)$$

La ecuación (11.2) establece una relación implícita entre 7 variables dimensionales cuyas dimensiones se dan en términos de 3 dimensiones básicas como son la masa, la longitud y el tiempo. Luego, en términos del análisis dimensional, tendremos que $n=7$ y $m=3$, con lo cual puede obtenerse una relación implícita adimensional entre cuatro variables Π^1 .

Dada la extensión del procedimiento para obtener esta relación, lo daremos por realizado. Luego:

¹ Tal como se expresa en el punto 4) del ítem 10.3.1, la relación implícita dimensional 11.2 puede dar lugar a distintas relaciones implícitas adimensionales según el grupo de variables repetitivas que se utilicen. Puede utilizarse cualquiera de esas relaciones adimensionales para guiar experimentos -la que aparezca como más descriptiva del fenómeno- o bien, construir una relación alternativa, tomando las mejores relaciones adimensionales para guiar los experimentos y expresar sus resultados. Siempre asegurando la cantidad $n-m$ de variables adimensionales, que sean independientes y que en ellas se encuentren las n variables dimensionales. La ecuación 11.3 es un ejemplo de ello.

$$\frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} = \psi \left(Re, \frac{L}{D}, \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (11.3)$$

En la expresión (11.3) una de las variables adimensionales de importancia es la relación entre la rugosidad absoluta y el diámetro –la rugosidad relativa-, hecho que habíamos discutido más arriba. También –y como parece lógico-, es importante la relación de aspecto del tubo dada por la relación entre la longitud y el diámetro. El número de Reynolds, como ya hemos visto en el capítulo 10, define el tipo de flujo (laminar o turbulento) en términos de la velocidad, la densidad, la viscosidad y el diámetro del conducto. El factor $\frac{1}{2}$ se coloca de expreso para que aparezca la energía cinética por unidad de volumen escalando la caída de presión, dado que lo que se está modelando es una “pérdida de energía”.

La expresión (11.3) es mucho más práctica que la (11.2), para realizar experiencias a los fines de dimensionar la diferencia de presión necesaria para impulsar un flujo en una tubería, pero posee cuatro variables adimensionales, con lo que se complica la expresión de los resultados en una única gráfica. Para ello requeriríamos solo tres variables adimensionales: una para las abscisas, una para las ordenadas y otra como un parámetro de selección de curvas. Puede entonces escribirse, por beneficios de las expresiones implícitas, que:

$$\frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} = \frac{L}{D} \hat{\psi} \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right), \text{ con } \hat{\psi} \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right) = f \quad (11.4)$$

El factor adimensional f se denomina “factor de fricción” o factor de fricción de Darcy, y puede ser determinado a partir de la (11.4) dado que todas las otras variables que aparecen pueden ser medidas o calculadas. De esta forma, puede confeccionarse una gráfica donde se vincule el factor de fricción con el número de Reynolds y la rugosidad relativa.

11.3 El diagrama de Moody

La gráfica que se aludía en el párrafo anterior, existe y se denomina diagrama de Moody, en honor a uno de sus creadores. Esta gráfica puede realizarse a expensas de un número limitado de experiencias de laboratorio y, al ser una carta adimensional, sus valores son aplicables a una infinidad de casos dimensionales. Todos los flujos de fluidos viscosos en conductos rectos de sección circular, están contenidos en el diagrama de Moody.

Reordenando la (11.4) como

$$f = \frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} \frac{D}{L} \quad (11.5)$$

el esquema experimental de la figura 11.3 permite obtener el factor de fricción, conociendo las propiedades del fluido (ρ , μ), los parámetros geométricos del tubo (L , D , ε), midiendo la diferencia de presión y midiendo el caudal circulante. Variando luego el caudal con la ayuda de una válvula de varias posiciones, pueden obtenerse otros valores del factor de fricción obrando de igual forma.

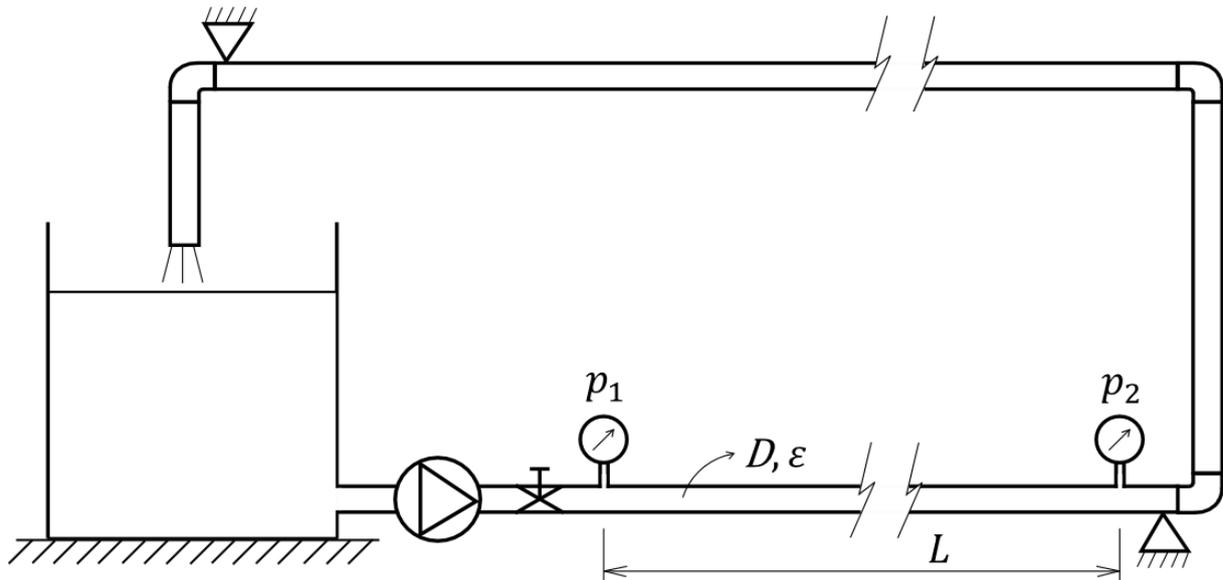


Figura 11.3: Instalación básica para la obtención del diagrama de Moody para una rugosidad relativa dada.

El mismo procedimiento puede repetirse para otras tuberías de modo de medir los factores de fricción para distintas relaciones de aspecto y rugosidades relativas.

La expresión de estos valores de f en una gráfica adimensional con el número de Reynolds en abscisas, el factor de fricción en ordenadas y la rugosidad relativa como parámetro, da como resultado el mencionado diagrama de Moody. Debe destacarse que el diagrama de Moody es un diagrama *log-log*, es decir expresado en escalas logarítmicas para poder contener la gran variación del número de Reynolds para los distintos casos de flujo. Dicha variable varía entre 5×10^2 y 10^8 , una escala como esa no puede expresarse en forma lineal debido a la gran longitud que resultaría para su eje coordenado (una marca cada milímetro en el eje de abscisas por cada valor de Re , implicaría un millón de milímetros, es decir, ¡un eje de 1km!).

El diagrama de Moody se presenta en la figura 11.4. En él pueden definirse tres zonas características de flujo: la de flujo laminar para el caso de flujos muy viscosos o muy lentos, la zona de transición para los flujos que están en un régimen intermedio entre laminar y turbulento, y la zona de flujo turbulento o completamente desarrollado para flujos muy rápidos o de muy baja viscosidad, donde el factor de fricción se vuelve prácticamente independiente del Re . En la referencia [18] Ud. podrá ver un trabajo experimental donde, con una instalación como la de la figura 11.3, se pudieron reproducir puntos del diagrama de Moody.

Finalmente, teniendo en cuenta las expresiones (11.1) y (11.5), expresaremos la pérdida de carga en tramos rectos de sección circular como:

$$h_f = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{g} \frac{L}{D} f \quad (11.6)$$

A continuación, obtendremos la relación lineal que aparece en el diagrama de Moody para el flujo puramente viscoso o de Hagen-Poiseuille.

El flujo puramente viscoso circulando por un tubo capilar fue estudiado en el ítem 8.5.2, habiendo obtenido la conocida relación de Hagen-Poiseuille dada por la expresión (8.17), que reescribimos habiendo hecho un pasaje de términos:

$$\Delta p^* = \frac{128 \mu L Q}{\pi D^4}$$

Expresando el caudal en términos del producto de la velocidad media (V_m) por el área de flujo, y multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $2\rho V_m$, se tiene:

$$\Delta p^* = \frac{128 \mu L}{\pi D^4} \frac{\pi D^2 V_m}{4} \frac{2\rho V_m}{2\rho V_m} = 64 \frac{1}{2} \rho V_m^2 \frac{\mu}{\rho V_m D} \frac{L}{D}$$

Luego, en términos de la ecuación (11.5):

$$f = \frac{\Delta p^*}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} \frac{D}{L} = \frac{64}{Re} \quad (11.7)$$

Aplicando el logaritmo decimal miembro a miembro de la (11.7), nos quedará una relación lineal con pendiente negativa en las coordenadas del diagrama de Moody. Esto es:

$$\log(f) = \log(64) - \log(Re) \quad (11.8)$$

11.4 Pérdida de carga en accesorios

Llamaremos accesorios a todos los elementos constructivos de una instalación de impulsión y conducción de fluidos que, unidos a dos o más tubos, produzcan variaciones en flujo tales como: continuidad del flujo entre dos tubos iguales (uniones dobles), cambio en la dirección de movimiento (codos), división del flujo en dos o más flujos (uniones té), cambio de la velocidad del flujo manteniendo el caudal constante (reducciones o expansiones) y variación del caudal circulante (válvulas). Los fuertes cambios de dirección o magnitud de la velocidad en el flujo conducido a través de dichos accesorios, producen inevitables pérdidas de carga que se suman a las de los tubos rectos.

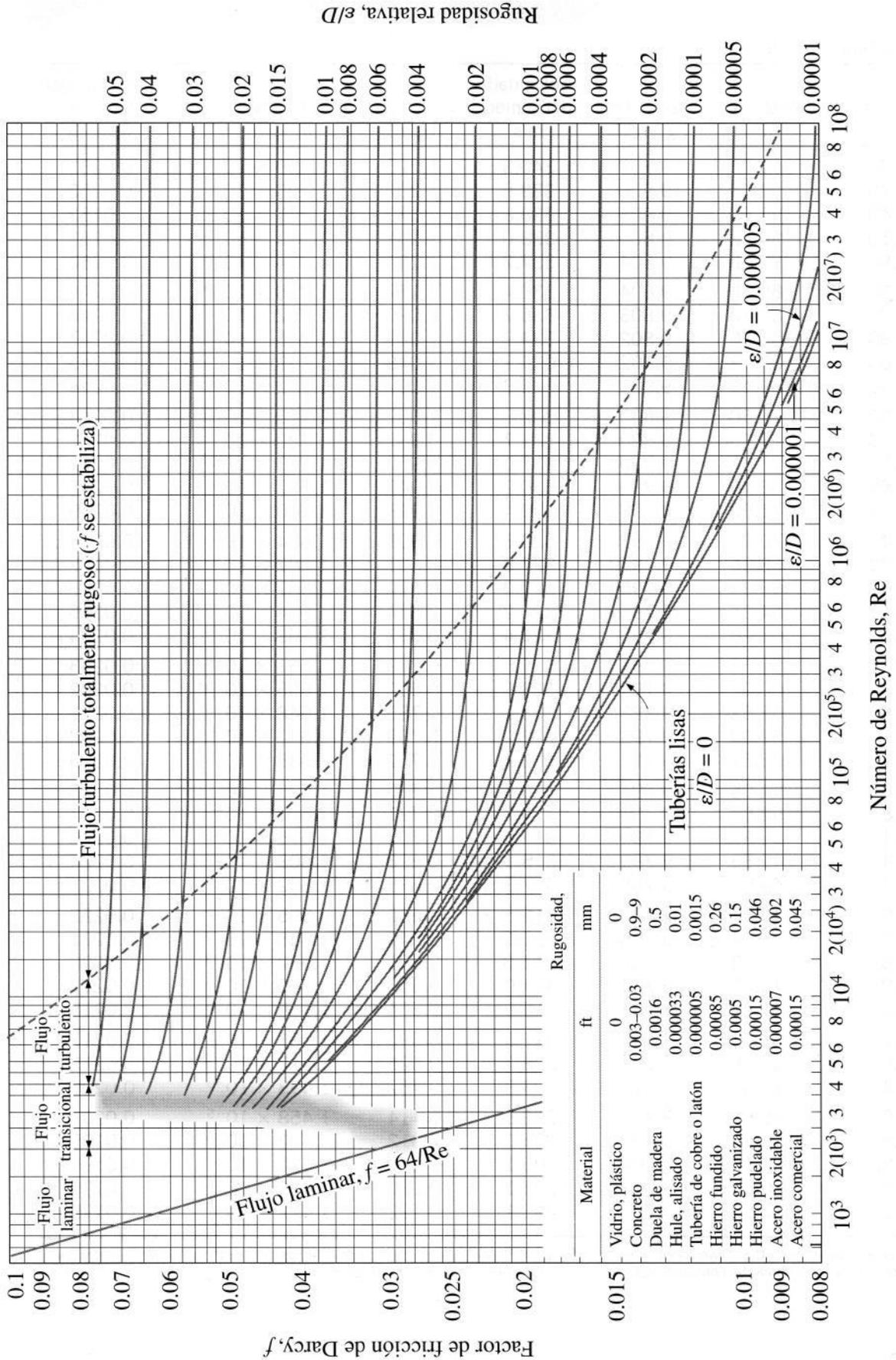


Figura 11.4: Diagrama de Moody para flujo totalmente desarrollado. Tomado de "Mecánica de Fluidos. Fundamentos y Aplicaciones", Y.A. Cengel y J.M. Cimbala. Mc Graw Hill, México, 2006.

Dada la geometría de los accesorios, es muy complicado evaluar la pérdida de carga de un modo análogo al realizado en la sección 11.2. Por ello, se ha optado por expresar la pérdida de carga en un accesorio como proporcional a la energía cinética del flujo; esta convención es particularmente útil para flujos completamente desarrollados a altos números de Reynolds.

El factor de proporcionalidad se obtiene experimentalmente para cada accesorio midiendo la caída de presión y se encuentra en tablas al efecto que proporcionan los fabricantes. Luego, la pérdida de carga expresada en [m] será:

$$h_a = \frac{\Delta p^*}{\rho g} = K \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{g} \quad (11.9)$$

En el caso de estrechamientos o ensanchamientos, debe decidirse que energía cinética utilizar dado que es distinta a ambos lados del accesorio. Como regla práctica, utilizaremos una energía cinética promedio. Es posible que se crea que tomando la mayor de las energías cinéticas nos pongamos del lado de la seguridad al sobredimensionar la pérdida de carga, no obstante, y como veremos en el próximo capítulo (ítem 12.5.2), sobredimensionar la pérdida puede llevar a la bomba a funcionar en un régimen que no sea el óptimo para el cual se la seleccionó.

Longitud equivalente

Otra forma de evaluar las pérdidas de carga en accesorios es asimilando los datos experimentales a tramos de tubos rectos de sección circular, de modo de definir una longitud equivalente o –mejor todavía- una relación equivalente entre longitud y diámetro lo cual hace aplicable a cualquier tubo la equivalencia realizada. La misma estrategia se utiliza cuando los tubos no poseen sección circular, para lo cual -de esta forma- se transforma el problema en uno equivalente a tubos de sección circular. Más allá de la importancia del tema, no nos abocaremos a él dado que las distintas formas de resolver problemas de dimensionamiento de instalaciones de impulsión y conducción de fluidos, es tema de estudio de asignaturas del área de las tecnologías aplicadas, por ejemplo, la denominada Instalaciones Industriales.

11.5 Pérdida de carga total en una instalación

Una instalación de conducción de fluido estará integrada en general por muchos tubos y muchos accesorios para cumplir con las diversas necesidades de suministro de fluido. Dado que la energía es un escalar, la pérdida total de energía será la suma de las pérdidas individuales en cada componente de la instalación, por ello, puede establecerse que:

$$h = \sum_{i=1}^p h_{f_i} + \sum_{j=1}^q h_{a_j} \quad (11.10)$$

Donde "p" y "q" son las cantidades de tubos rectos y accesorios respectivamente.

11.6 Solución de problemas de dimensionamiento de cañerías cuando las incógnitas son la pérdida de carga o el caudal circulante

La solución de problemas donde hay una instalación por la que circulará un caudal determinado con la asistencia de una bomba, puede tener dos formas de resolverse según qué datos se conozcan. Esto es:

- 1) Dimensionar una bomba para impulsar un caudal requerido por una instalación dada (se conocen: la geometría, los tubos y todos los accesorios).
- 2) Conocer el caudal impulsado, dada una instalación y una bomba (o una altura equivalente, por ejemplo, de un tanque elevado).

Ambos problemas se resuelven planteando la ecuación de la energía mecánica, (teniendo en cuenta el último párrafo del ítem 9.3) donde la pérdida de carga se dimensionará de acuerdo a la expresión (11.10). En ésta será necesario valorar coeficientes de fricción de acuerdo a los flujos dados en cada parte de la instalación.

Para los problemas del tipo 1), la solución es directa debido a que se conocen las partes de la instalación (tubos y accesorios) y se conoce el caudal circulante. Ello implica conocer los números de Reynolds (Re) para los cuales quedan establecidos todos los factores de fricción que se requieran.

En el caso de problemas del tipo 2), la ecuación a resolver para la determinación de la velocidad media en las tuberías tendrá la siguiente forma:

$$V_m = \sqrt{F(f, \dot{w}_{eje}, \dots, \text{otras variables})} \quad (11.11)$$

La ecuación (11.11) no puede resolverse por sí sola debido a que existen como incógnitas la velocidad y el factor de fricción que depende a su vez de ésta. Es necesario aportar otra ecuación para dar con un sistema resoluble. Esta ecuación no la disponemos explícitamente pero sí gráficamente, esto es, el diagrama de Moody. Dicho diagrama, luego, cerrará el sistema de ecuaciones y se requerirá necesariamente un algoritmo numérico iterativo por dos razones: la naturaleza no lineal de la ecuación (11.11) y la forma implícita de la funcionalidad dada por el diagrama de Moody.

El siguiente algoritmo numérico es convergente, rápidamente convergente porque la convergencia se produce en el coeficiente de fricción. Dicha variable varía sólo en dos órdenes de magnitud (entre 0,008 y 0,1) mientras que el Re lo hace en seis órdenes de magnitud. Por ello, la convergencia en el factor de fricción es mucho más fácil de lograr debido al menor entorno de variación respecto al Re :

CAPITULO 11: FLUJOS VISCOSOS: PERDIDA DE CARGA

- 1- Se supone un valor de factor de fricción inicial f_i con el cual obtener de la ecuación (11.11) un valor V_{mi} . Una estimación inicial para el factor de fricción entre 0,02 y 0,025, es usualmente una buena inicialización.
- 2- Con V_{mi} se obtiene un Re_i .
- 3- Con Re_i y la rugosidad relativa que corresponda (ε/D), se determina un f_{i+1} .
- 4- Se controla la convergencia en el factor de fricción, evaluando que:

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{f_i} \leq 0,05$$

- 5- Si se cumple la sentencia del punto 4, los valores finales serán f_{i+1} y V_{mi} , de lo contrario, con f_{i+1} se vuelve al punto 1 para obtener una V_{mi+1} y continuar.

El algoritmo presentado es básico y sobre él pueden adaptarse modificaciones cuando haya más de un coeficiente de fricción a determinar, como también la utilización de tablas y/o gráficas que simplifiquen la adopción de valores iniciales para comenzar el proceso iterativo.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) Enumere las variables y parámetros de un flujo que inciden en la pérdida de carga.
- 2) Defina las rugosidades absolutas y relativa de una tubería.
- 3) En una tubería, ¿por qué importa la rugosidad relativa y no la absoluta?
- 4) ¿Por qué cree Ud. que las pérdidas de carga se expresan en términos de la energía cinética del flujo?
- 5) ¿El diagrama de Moody engloba todos los casos posibles de pérdida de carga en tubos rectos de sección circular? ¿Por qué?
- 6) ¿Para construir el diagrama de Moody, se habrán necesitado varios bancos experimentales? Específicamente, ¿distintas bombas?
- 7) ¿Por qué el diagrama de Moody se presenta en una escala log-log?
- 8) Defina un coeficiente adimensional de pérdida de carga representativo de un accesorio genérico.
- 9) Un accesorio colocado en un tramo de tubería ocasiona una pérdida de carga que puede asimilarse a una longitud adicional del tubo. A partir del conocimiento de la caída de presión en el accesorio, ¿cómo definiría una "longitud equivalente" para el accesorio?
- 10) ¿Por qué la iteración para obtener la velocidad de un flujo en un sistema de cañerías, se basa en la convergencia del factor de fricción y no del número de Reynolds?

CAPITULO

12

Máquinas Hidráulicas: Turbomáquinas de Impulsión

12.1 Introducción

Las turbomáquinas de impulsión, comúnmente llamadas bombas, son los dispositivos que se utilizan para producir y mantener un flujo en un sistema de tuberías. El aumento de energía del flujo se trasunta fundamentalmente en un incremento de la presión y se debe a la interacción del flujo con aspas rotatorias. Existen tres tipos de turbomáquinas: las de flujo radial donde éste ingresa en la dirección del eje del rotor (impulsor) y egresa en dirección radial; las de flujo axial en las que el flujo ingresa y egresa de la bomba en la dirección del eje del impulsor; y las de flujo mixto donde el flujo inicialmente axial egresa de la bomba con componentes radiales y axiales.

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar los fundamentos del fenómeno de impulsión en bombas radiales –también llamadas centrífugas-, que son las más utilizadas en las instalaciones de impulsión de agua. La característica requerida para el flujo en tales instalaciones es la de poseer elevadas presiones con relativamente bajos caudales. La alta presión es necesaria para vencer las pérdidas de carga en largas tuberías y accesorios que conforman la red de suministro. Las bombas radiales se utilizan generalmente para fluidos newtonianos de baja viscosidad y, de ser no newtonianos, estos deben poseer características pseudoplásticas.

Asimismo, en este capítulo presentaremos aspectos básicos en el diseño y funcionamiento de instalaciones, para que las bombas –en tanto partes esenciales de éstas- funcionen adecuadamente.

12.2 Bombas de flujo radial o centrífugas

Las bombas se constituyen por un rotor alojado excéntricamente en una caja o cuerpo de modo de producir una cámara de sección variable en forma de voluta rodeando el rotor. La figura 12.1 muestra un esquema de un corte en vista frontal, donde se ve el rotor, la caja y la voluta cuya razón es la de recibir el flujo acelerado por las aspas y conducirlo hacia la boca de salida a través de secciones cada vez mayores. Por ello, gran parte de la energía cinética lograda por el flujo en la interacción con las aspas, se transforma en trabajo de flujo, es decir en un incremento de la presión. Esto es muy importante porque gran parte de esa energía cinética se debe a flujos secundarios surgidos por la rotación que le impone el rotor al flujo; desde este punto de vista la voluta recupera una energía de nula utilidad para la impulsión.

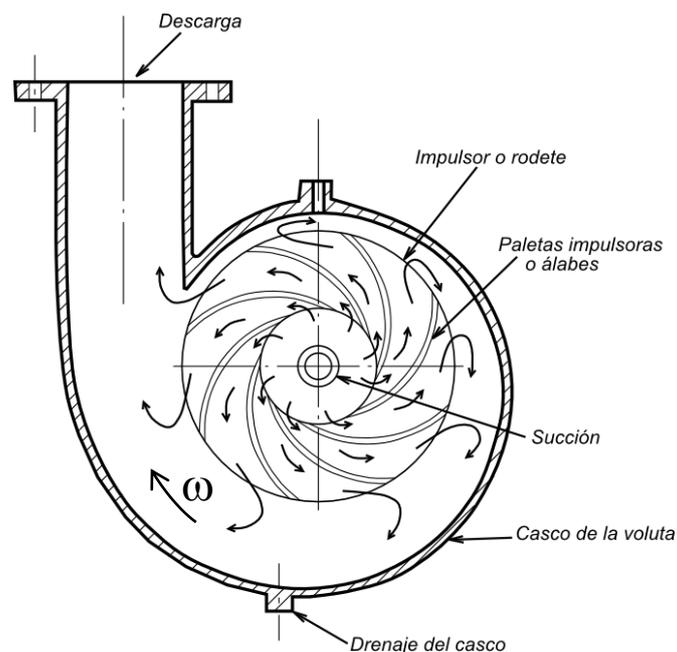


Figura 12.1: Esquema en corte de una bomba centrífuga. Se ven: el impulsor, la voluta y la descarga. Los álabes están inclinados hacia atrás respecto a la dirección de movimiento.

Seguidamente estudiaremos el fenómeno de impulsión rotodinámica de un fluido incompresible a través de un modelo simplificado que no considera la viscosidad del flujo como tampoco la naturaleza compleja del flujo tridimensional real dentro de la caja de la bomba. Consideremos el álabe esquematizado en la figura 12.2, que forma parte de un rotor que gira con una rapidez angular ω ; los extremos 1 y 2 serán la entrada y salida del flujo respectivamente, para lo que definiremos la siguiente simbología: V será la velocidad absoluta, V_t y V_n sus componentes normal y tangencial al volumen de control fijo (ver líneas de punto

12.2 BOMBAS DE FLUJO RADIAL O CENTRIFUGAS

en a) y b)) y \underline{v} la velocidad relativa del fluido respecto al álabe que siempre se supone tangente al mismo. La rapidez periférica del álabe es $u = \omega r$, donde r es el radio del volumen de control en la superficie que corresponda; el ángulo entre \underline{V} y \underline{u} es α , mientras que el ángulo entre \underline{v} y \underline{u} es β .

Planteando el balance de cantidad de movimiento angular en el volumen de control (ver ecuación 7.20), tomando como origen el centro del rotor, asumiendo estado estacionario y despreciando los momentos debidos a la fuerza gravitacional, se tiene:

$$\int_A \underline{r} \times \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dA = \sum_{i=1}^n \underline{M} \quad (12.1)$$

La suma de momentos del miembro derecho de la (12.1) será entonces el torque aplicado al eje del rotor y transmitido al flujo. Debido al sistema plano de velocidades (no hay componentes de velocidad en la dirección del eje del rotor) y la suposición de perfiles planos de velocidad, tendremos:

$$T = \rho Q (r_2 V_{t2} - r_1 V_{t1}) \quad (12.2)$$

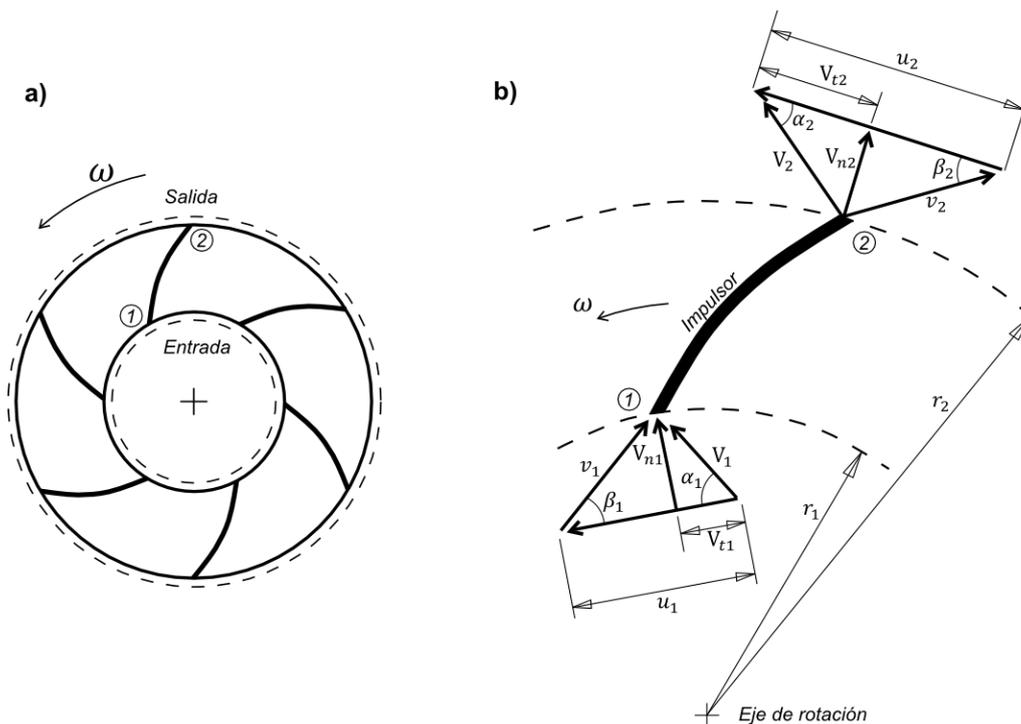


Figura 12.2: a) Volumen de control rodeando el impulsor. b) Triángulos de velocidades en la entrada y salida de un álabe (se indican los módulos de los vectores velocidad).

En la (12.2) se ve claramente que las componentes tangenciales de la velocidad absoluta del fluido, son las únicas que contribuyen al momento angular del flujo, tanto en la sección de entrada como en la sección de salida. Luego, la potencia mecánica de la bomba, entregada totalmente al flujo (esto es, una bomba con eficiencia del 100%), será:

$$\omega T = \rho Q (u_2 V_{t2} - u_1 V_{t1}) \quad (12.3)$$

Dados los triángulos de velocidades en los extremos del álabe de la figura 12.3, pueden expresarse las componentes tangenciales de velocidad como proyecciones de las velocidades absolutas, es decir:

$$\omega T = \rho Q (u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1) \quad (12.4)$$

En el caso ideal en el que estamos trabajando, donde despreciamos cualquier pérdida, la expresión (12.4) debe ser la potencia de la bomba que, expresada en altura de columna de fluido, nos dará la elevación de presión teórica a través de la denominada ecuación de Euler:

$$H_T = \frac{\omega T}{\rho g Q} = \frac{(u_2 V_2 \cos \alpha_2 - u_1 V_1 \cos \alpha_1)}{g} \quad (12.5)$$

Sólo por coincidir con la bibliografía más específica de bombas e instalaciones de impulsión de fluidos, adoptaremos el símbolo H_T , que no es otra cosa que lo que en el capítulo 9 hemos llamado $(-\dot{w}_{eje})$.

Aplicando el teorema del coseno a los triángulos de velocidades en los extremos 1 y 2, se tiene:

$$v_1^2 = u_1^2 + V_1^2 - 2 u_1 V_1 \cos \alpha_1 \quad (12.6)$$

$$v_2^2 = u_2^2 + V_2^2 - 2 u_2 V_2 \cos \alpha_2 \quad (12.7)$$

Despejando de las ecuaciones (12.6) y (12.7) los productos de las velocidades absolutas y los cosenos de los ángulos, y reemplazándolos en la (12.5), se tiene que:

$$H_T = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{(v_1^2 - u_1^2) - (v_2^2 - u_2^2)}{2g} \quad (12.8)$$

El primer término del segundo miembro de la (12.8) es la ganancia de energía cinética del flujo entre la entrada y la salida del rotor. Para interpretar el significado del segundo término, plantearemos el balance de energía mecánica sobre el mismo volumen de control con que estamos trabajando y con las mismas suposiciones utilizadas para obtener la expresión (12.2):

$$H_T = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \quad (12.9)$$

De la comparación entre la (12.8) y la (12.9) se desprende que el segundo término del segundo miembro de la primera no es otra cosa que la elevación de presión y altura del flujo entre 1 y 2. Eliminando H_T de las expresiones (12.8) y

(12.9) se llega a la ecuación históricamente conocida como ecuación de Bernoulli en coordenadas rotatorias

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2 - u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2 - u_2^2}{2g} \quad (12.10)$$

que, si despreciamos la diferencia de alturas debido al relativo pequeño tamaño de las bombas, nos permite escribir la ganancia de presión como:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} [(v_1^2 - u_1^2) - (v_2^2 - u_2^2)] \quad (12.11)$$

expresión en la que subyacen parámetros geométricos (los ángulos α y β y los radios interior y exterior del rotor) y parámetros operativos como la velocidad angular del rotor. Una adecuada selección del valor de estos parámetros derivará en una óptima ganancia de presión.

De la ecuación (12.5) se ve que el mejor diseño de un rotor sería aquel en el que el flujo carezca de momento angular a la entrada del álabe, es decir, aquél que no posea componente tangencial en dicha sección. Dicho en términos simbólicos, para el ángulo $\alpha_1 = 90^\circ$, luego:

$$H_T = \frac{u_2 V_2 \cos \alpha_2}{g} \quad (12.12)$$

Dada la geometría del triángulo de velocidades en la sección de salida (ver figura 12.3), puede escribirse que:

$$V_2 \cos \alpha_2 = u_2 - V_{n2} \cot \beta_2 \quad (12.13)$$

Relación que reemplazada en la (12.12) nos lleva a:

$$H_T = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 V_{n2} \cot \beta_2}{g} \quad (12.14)$$

Considerando que el caudal que egresa del rotor en la sección de salida se debe únicamente a la velocidad normal y, debido a la suposición de flujo uniforme en las secciones y considerando un ancho b_2 del rotor en la dirección de su eje, puede escribirse que:

$$V_{n2} = \frac{Q}{2 \pi r_2 b_2} \quad (12.15)$$

Introduciendo la expresión (12.15) en la (12.14), teniendo en cuenta que $u_2 = \omega r_2$, la elevación de presión o altura de carga neta máxima que proporcionará la bomba será:

$$H_T = \frac{\omega^2 r_2^2}{g} - \frac{\omega \cot \beta_2}{2 \pi b_2 g} Q \quad (12.16)$$

La (12.16) muestra una funcionalidad lineal de H_T con Q para un rotor dado (lo que implica el establecimiento de todas las magnitudes geométricas y operativas que participan en la expresión), de modo que puede reescribirse como:

$$H_T = a_0 - a_1 Q \quad (12.17)$$

Dependiendo del valor del ángulo β_2 la relación lineal tendrá pendiente positiva, negativa o nula como puede verse en la figura 12.3.

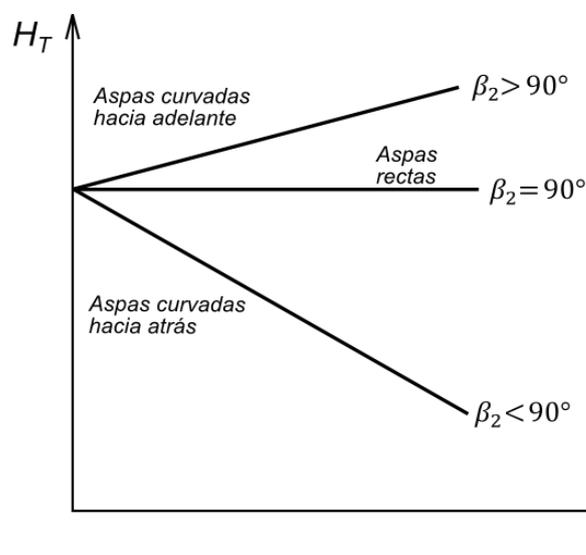


Figura 12.3: Altura de carga neta máxima en función del caudal para distintas inclinaciones - respecto a la dirección de movimiento- de los álabes del impulsor.

Los valores de $\beta_2 > 90^\circ$ corresponden a aspas o álabes inclinados hacia adelante. En ese caso la altura de carga aumentaría con el caudal; si bien ello sería muy deseable en cualquier instalación, las máquinas se vuelven inestables demandando cada vez más potencia para ajustar su punto de operación. Las aspas rectas, es decir cuando $\beta_2 = 90^\circ$, presentarán una altura constante respecto a la variación de caudal; en el caso de bombas pequeñas, tal como las de uso corriente (hasta 2 HP) en instalaciones domiciliarias, se utilizan rotores con aspas rectas porque son de más fácil fabricación y por ende de menor precio. Los álabes curvados hacia atrás, cuando $\beta_2 < 90^\circ$, presentan una recta teórica con pendiente negativa lo cual muestra que para mayores caudales la altura de carga se reduce. Esta es la configuración más preferida cuando se requiere estabilidad, robustez y durabilidad en una bomba. Cabe recordar que los últimos argumentos sólo tienen significado dentro de las aproximaciones efectuadas para el análisis; básicamente la no consideración de la viscosidad y la reducción del flujo a una configuración plana en el plano del rotor.

12.3 El fenómeno de cavitación

La cavitación es el fenómeno por el cual los líquidos a una cierta temperatura y en condiciones hidrodinámicas, pasan –en parte– al estado de vapor debido a una brusca disminución de la presión por debajo de la presión de vapor (p_v). Es decir: cuando ello ocurre, una proporción de la masa de líquido pasa a la fase vapor para mantener constante la presión p_v que corresponde a esa temperatura. La fase líquida pasa luego a una mezcla de dos fases. Esto sucede con frecuencia en las máquinas rotantes debido a la gran aceleración del flujo, que gana energía cinética a expensas de la reducción de la presión. En el caso de las bombas, la máquina comienza a vibrar y el flujo comienza a ser discontinuo; por estas dos razones fundamentales se debe evitar que una bomba “entre en régimen de cavitación”.

12.3.1 Presión de vapor

Es la presión, para una dada temperatura, a la cual la fase vapor se encuentra en equilibrio termodinámico con la fase líquida o con la fase sólida, siempre como mezcla de dos fases (también existe una temperatura y presión a la cual se encuentran en equilibrio las tres fases y se denomina punto triple). El agua (líquida), puede estar en equilibrio con su vapor a cualquier temperatura y la presión de éste será la que indica la figura 12.4. Por ejemplo, la presión de vapor a nivel del mar es de una atmósfera (aproximadamente 101,3 [kPa], es decir la presión ambiental normal) para lo cual el agua hierve a una temperatura constante a la que se le ha asignado el valor de 100 °C.

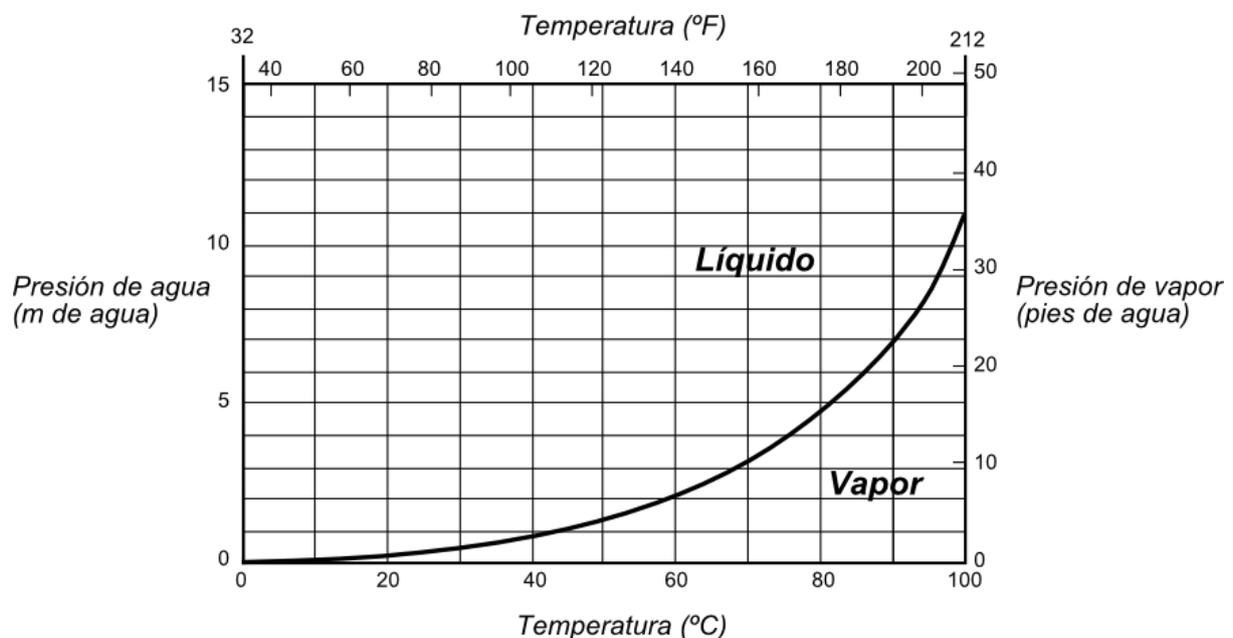


Figura 12.4: Presión del vapor de agua a diferentes temperaturas.

Para ejemplificar este fenómeno supongamos una cámara cerrada, totalmente llena de agua a una presión determinada (ver figura 12.5). Si la cámara se

caliente, habrá una temperatura en la que el agua comenzará a pasar a vapor manteniéndose constantes ambas variables termodinámicas: la presión y la temperatura. Si se repite la experiencia con la misma cámara, pero con agua a otra presión, se verá que el pasaje a vapor se producirá a otra temperatura. Las presiones y las temperaturas de equilibrio (que son las de ebullición) se encuentran en la figura 12.4. A presiones menores, el agua comienza a hervir a temperaturas más bajas. Dicho de otro modo, la energía que necesitan las moléculas para escapar del seno líquido es menor para vencer la contrapresión. Una consecuencia de esto es que a grandes altitudes es más dificultoso cocer alimentos en agua hervida porque ésta hierve a menor temperatura debido a la baja presión ambiental. Por el contrario, las denominadas "ollas a presión" toman ventaja de este hecho natural del agua, evitando la salida del vapor y generando una sobrepresión interior –controlada por una válvula- para hacer que el agua hierva a más de 100 °C (típicamente alrededor de los 120 °C) y por lo tanto los alimentos se cocinen más rápido.

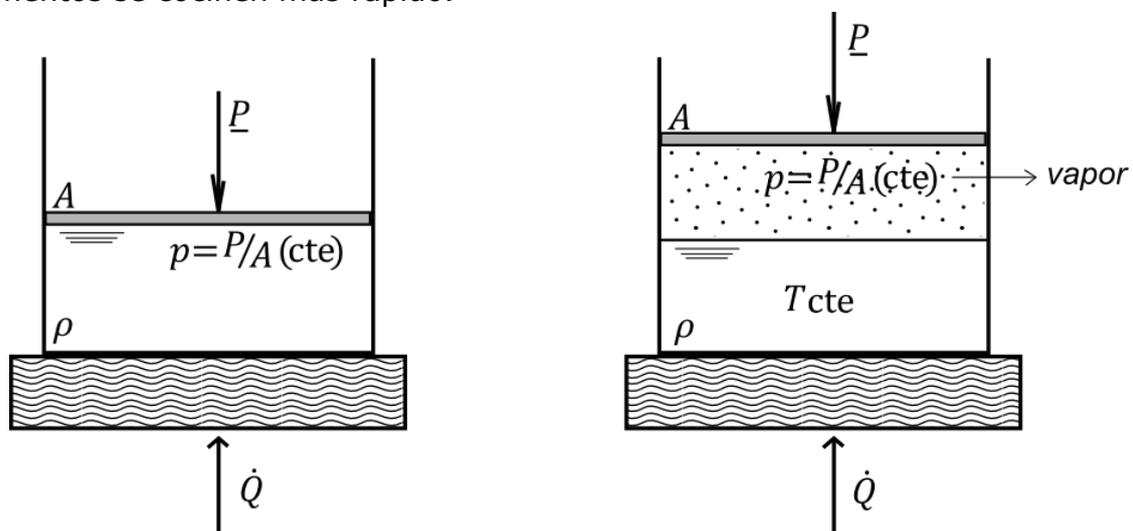


Figura 12.5: Cámara cerrada conteniendo agua líquida en proceso de calentamiento. A una dada temperatura para la presión del agua, ésta comenzará a pasar a vapor manteniendo su temperatura constante.

12.3.2 Sistemas de dos fases

La figura 12.6 muestra el diagrama T-S genérico de una sustancia pura –como el agua-, donde se ven las distintas zonas de temperatura y entropía en la que la sustancia aparece en estado sólido, líquido o vapor (vaporización). Se ve la clásica campana en cuyo interior se presentan los estados de equilibrio líquido-vapor para distintas temperaturas. En la zona inferior de la campana y por debajo de la línea de punto triple, se hallan los puntos de equilibrio entre las fases sólido y vapor (sublimación).

La línea que comienza en "a" representa una isobara donde se ve que dentro de la campana la presión se mantiene constante para cada temperatura. La rama izquierda de la campana refleja el estado de líquido saturado (todo líquido) y la rama derecha la de vapor saturado (todo vapor).

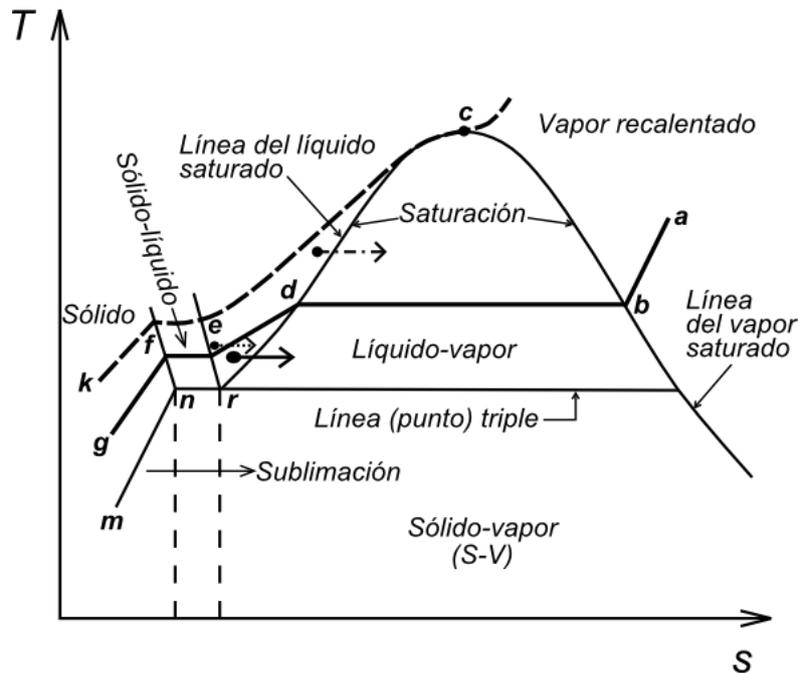


Figura 12.6: Diagrama Temperatura-Entropía de estados del agua. Se muestran con flechas los procesos que producirían cavitación.

Cuando un líquido está en movimiento a una temperatura dada, puede reducir su presión –por razones hidrodinámicas– por debajo de la presión de vapor. Como la sustancia no puede estar sólo en fase líquida por debajo de la presión de vapor, una porción del líquido pasará a vapor manteniendo constante la presión en el valor p_v . El sistema se vuelve de dos fases y su estado de equilibrio se encontrará dentro de la campana. Este es un fenómeno que aparece usualmente en la succión de las bombas, donde el líquido se mueve aproximadamente a temperatura constante hacia zonas de menor presión (ver flecha de línea entera), donde, la presión puede llegar a ser p_v y producirse cavitación. Esta dificultad es tanto mayor cuanto mayor sea la temperatura del líquido impulsado, debido a que las isobaras se juntan muy cerca de la campana en la zona superior de la misma (ver flecha de trazos y puntos).

Para evitar la cavitación debe suministrarse a la bomba un líquido a presión bastante mayor que la del vapor a esa temperatura, lo cual se asegura en muchos casos haciendo que la bomba aspire por debajo de un tanque de suministro elevado. Esto equivale en la figura 12.6, a correr el proceso hacia la izquierda (ver flecha de puntos). El tanque elevado deberá ser más elevado cuanto mayor sea la temperatura del líquido bombeado.

12.4 Sistema típico de cañerías de impulsión y conducción de líquidos

La figura 12.7 muestra un sistema típico de cañerías donde una bomba impulsa un caudal de líquido para satisfacer una determinada demanda. Dicho circuito puede dividirse en dos zonas: la parte de la instalación que está antes de la bomba o zona de succión y la parte que está después de la bomba o zona de

descarga. La expresión (9.14) gobierna el balance de energía mecánica dentro del fluido rodeado por los tanques y cañerías, la que debe ser planteada para comenzar a analizar distintos aspectos de estos sistemas:

$$- \dot{w}_{eje} = \Delta \left(\frac{v_m^2}{2g} + z_c + \frac{p}{\rho g} \right) + h = H_T \quad (12.18)$$

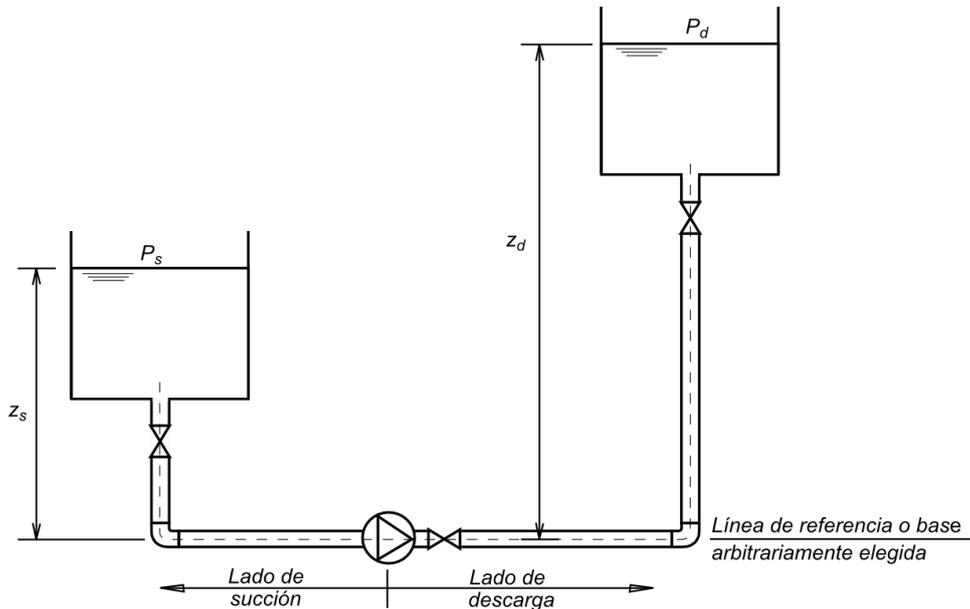


Figura 12.7: Sistema típico de bombeo: ramas de succión y de descarga. Por simplicidad se suponen tanques para la succión y la descarga para desprestigiar las energías cinéticas.

12.4.1 Sistemas de alturas de carga

Definiremos como alturas de carga a las energías del fluido antes y después de la bomba. En un sistema de bombeo consideraremos las alturas de carga de succión, de descarga y neta positiva de aspiración. Las definiremos a continuación en concordancia con la figura 12.7 donde el fluido se aspira desde un tanque y se descarga en otro, y donde la línea de referencia de alturas se ha tomado coincidente con la posición de la bomba. La altura de carga de succión (energía disponible en la succión) estará dada por la energía potencial (de altura) más el trabajo de flujo en la sección de entrada, menos la pérdida de carga en la cañería de succión, es decir:

$$H_s = z_s + \frac{p_s}{\rho g} - h_s \quad (12.19)$$

De modo análogo, la altura de carga en la descarga, estará dada por las energías a vencer para lograr las condiciones de descarga. Es decir, la energía de altura, el trabajo de flujo y las pérdidas de carga en dicha cañería:

$$H_d = z_d + \frac{p_d}{\rho g} + h_d \quad (12.20)$$

La altura de carga total H_T requerida a la bomba será la diferencia entre las expresiones (12.20) y (12.19), es decir:

$$H_T = H_d - H_s = (z_d - z_s) + \frac{(p_d - p_s)}{\rho g} + (h_d + h_s) \quad (12.21)$$

La altura de carga de succión (H_s) disminuye y la requerida en la descarga (H_d) aumenta cuando el caudal demandado es mayor, ello debido al aumento de la pérdida de carga en ambas partes de la instalación. Por este motivo, la potencia demandada a la bomba aumenta con el incremento del caudal. Como veremos más adelante, las bombas centrífugas cambian su punto de funcionamiento para impulsar mayores caudales, pero logrando presiones (o alturas) menores; ello, mientras tanto no se produzca cavitación.

Si el caudal se incrementa, la bomba debe producir un vacío cada vez mayor para poder succionar en el mismo tiempo más volumen de líquido, pero esto tiene un límite que es el que da el fenómeno de cavitación. Como se ha dicho en el ítem 12.3, el funcionamiento de la bomba con cavitación debe evitarse por la discontinuidad del flujo, la vibración de la máquina y los daños sobre el rotor que producen las burbujas de vapor que condensan súbitamente cuando llegan a regiones de presiones elevadas. Puede definirse luego, la "altura neta positiva de aspiración" (ANPA) como la altura de carga disponible en la rama de succión, con referencia a la presión de vapor para la temperatura del líquido bombeado. Es decir:

$$ANPA = z_s + \frac{(p_s - p_v)}{\rho g} - h_s = H_s - \frac{p_v}{\rho g} \quad (12.22)$$

El ANPA disponible en un sistema debe ser siempre positivo para no entrar en cavitación. El aumento de la pérdida de carga en la aspiración debido al aumento del caudal, significa una pérdida de ANPA. Por ejemplo, en el bombeo de agua a 100 °C desde un tanque abierto a la atmósfera, $p_s = p_v$ con lo cual para ser posible la aspiración, el tanque debe estar elevado. En cambio, cuando $(p_s - p_v)$ es lo suficientemente grande, puede aspirarse un líquido incluso desde un reservorio ubicado por debajo de la bomba. La figura 12.8 muestra estos esquemas de posición relativa entre la bomba y el tanque de suministro.

El posicionamiento de bombas por encima del nivel del líquido aspirado que se encuentra en condiciones de temperatura y presión ambiental, tiene un límite. Para el agua, dicho límite -teórico- es de 10,3 [m] debido a que para levantar una columna de 10,3 [m] de agua a presión atmosférica se requiere una depresión que llegue al vacío total, con lo cual el agua llegaría totalmente en fase vapor al interior de la bomba. Las bombas domiciliarias que extraen agua de las napas succionando desde el nivel del suelo, sólo pueden lograrlo cuando las napas freáticas -en teoría- se encuentran no más allá de 10,3 [m] de profundidad (bastante menos en la práctica). Para extraer agua de napas más profundas, hay que llevar las bombas a la napa, es decir utilizar bombas de

profundidad. Los molinos de campo, por ejemplo, tienen el émbolo impulsor en las cercanías de la napa de la cual extraen el agua para riego u otros usos.

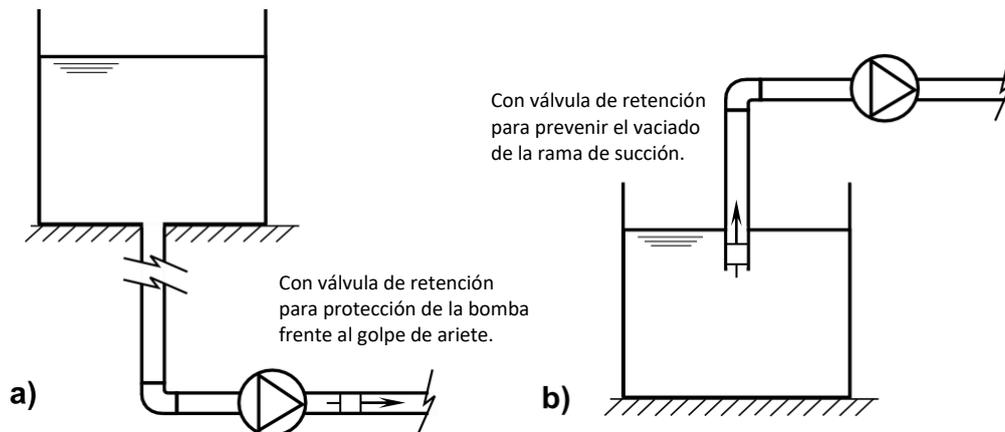


Figura 12.8: Posición relativa entre la bomba y el tanque de suministro. a) Situación más conveniente, especialmente para líquidos calientes. b) Situación no deseable pero utilizable sólo con líquidos fríos. Debe instalarse una válvula de retención en la rama de succión, más baja que el nivel del tanque, para evitar que la tubería se vacíe en momentos de parada. Ver sus usos en: https://drive.google.com/file/d/18eawliv_DYddWnHIBC53hFMP3hsfWQ0/view?usp=drive_link https://drive.google.com/file/d/1q52NxtLxXKff1tq4rJoCetQhYMi30g4k/view?usp=drive_link

La figura 12.9 muestra un diseño esquemático de un banco de pruebas hidráulicas para mediciones indirectas de pérdida de carga en tuberías rectas de sección circular y ensayos varios entre los que se encuentra la inducción artificial de cavitación y la visualización de flujos en tramos de tuberías transparentes.

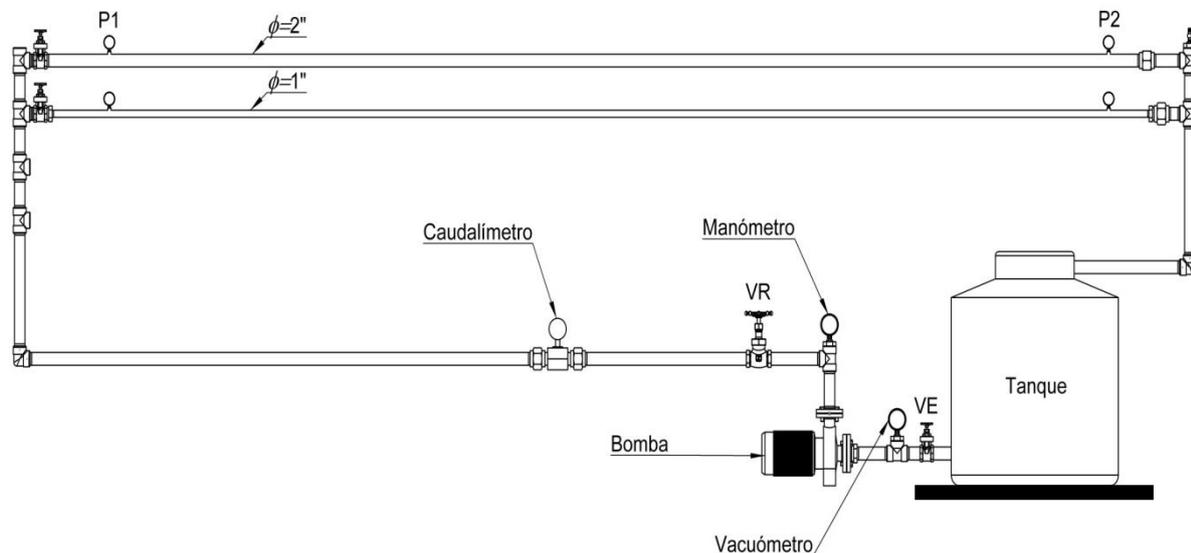


Figura 12.9: Esquema del diseño de un banco de pruebas hidráulicas. Obsérvese la ubicación relativa de la bomba respecto al tanque y los diferentes accesorios e instrumentos para las mediciones. VE: válvula esclusa, VR: válvula de regulación o estranguladora, P1-2 presiones.

Las figuras 12.10 y 12.11, por su parte, muestran la materialización del banco de pruebas hidráulicas en la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional (FRSF-UTN), equipamiento construido por el autor, docentes colaboradores y el soporte económico del Departamento de Ingeniería Industrial de la citada Facultad.

12.4 SISTEMA TÍPICO DE CAÑERÍAS



Figura 12.10: Vista general (desde dos ángulos) del banco de pruebas hidráulicas desarrollado en la FRSF-UTN.



Figura 12.11: Imagen de la bomba y su conexión con el tanque de suministro y la red de cañerías para las mediciones indirectas de pérdida de carga. Obsérvese la válvula esclusa (instalada ex profeso) y el vacuómetro en la rama de succión; el manómetro en la rama de descarga y los tubos transparentes en ambas ramas. La fotografía corresponde a un momento en el cual el flujo de ingreso a la bomba está cavitando, el color blanco se debe a la emulsión del vapor en el líquido. El flujo de salida es transparente porque el vapor se ha condensado en la zona de alta presión, produciendo microerosiones en el rotor de la bomba.

CAPITULO 12: MAQUINAS HIDRAULICAS: TURBOMAQUINAS DE IMPULSION

Con fines didácticos se generan condiciones de cavitación mientras la bomba está funcionando, ello se logra cerrando paulatinamente la válvula esclusa ubicada a la salida del tanque de suministro. El cierre impacta en el sistema aumentando la pérdida de carga de la rama de succión (h_s en la ecuación 12.22) y por consiguiente reduciendo continuamente el ANPA. La bomba, para asegurar el suministro, genera un vacío relativo cada vez mayor hasta que la presión llega a la presión de vapor a esa temperatura y se produce la cavitación. La figura 12.12 muestra el aumento del fenómeno a medida que se cierra la válvula esclusa y el vacuómetro indica la mayor depresión en la succión de la bomba.

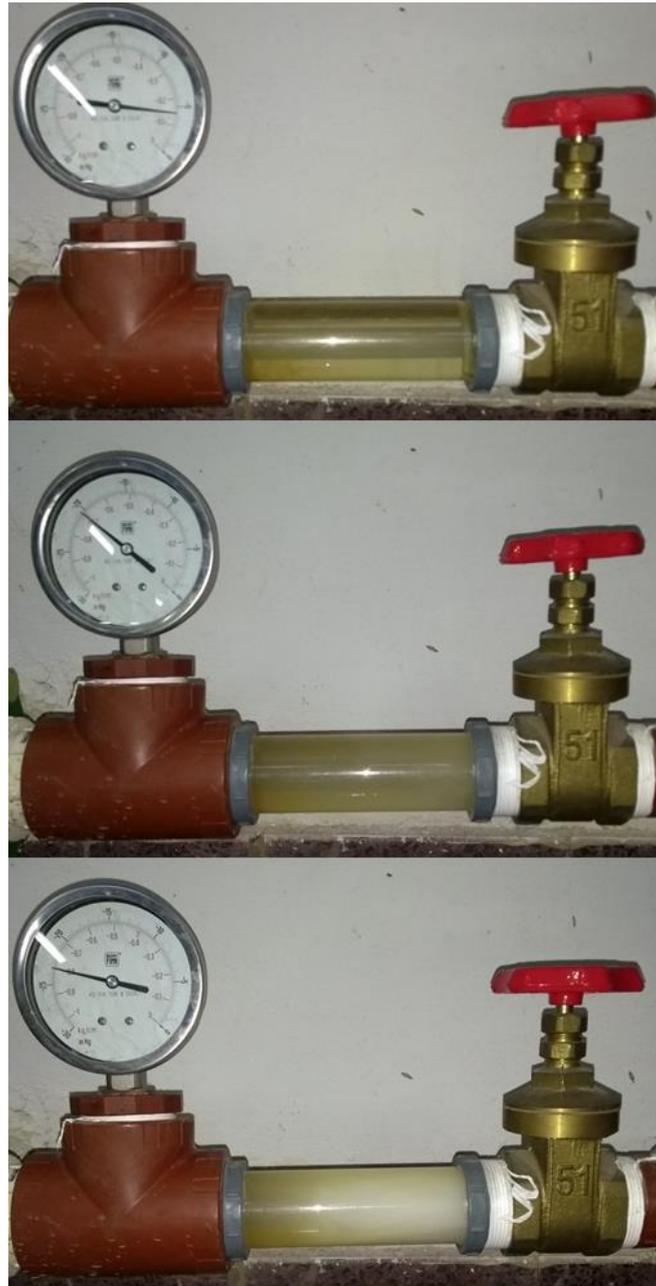


Figura 12.12: Inducción artificial de cavitación por el cierre de la válvula esclusa situada a la salida del tanque de suministro. El proceso es de disminución del ANPA y el flujo va tornándose cada vez más blanco.

12.5 Curvas características de bombas centrífugas

El funcionamiento de una bomba centrífuga, para una determinada velocidad rotacional del impulsor y de viscosidad del líquido, se representa graficando la altura de carga total, la potencia y el ANPA como funciones del caudal. Estas curvas características tienen una variedad de formas que dependen de la geometría del impulsor y la cámara de la bomba. En general, las curvas se presentan para el agua y siguiendo reglas de semejanza pueden extrapolarse a otros fluidos.

La altura de carga de una bomba centrífuga para un dado caudal es independiente de la densidad del fluido (ver ecuación 12.16), por ello, las presiones generadas por una misma bomba en dos fluidos distintos tendrán la siguiente relación:

$$H_T = \frac{\Delta p_1}{\rho_1 g} = \frac{\Delta p_2}{\rho_2 g} \Rightarrow \frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (12.23)$$

La figura 12.13 muestra en forma genérica una curva característica ¹ de una bomba centrífuga superpuesta a la curva de demanda del sistema. Mientras la bomba produce menores alturas de carga para mayores caudales, el sistema genera mayores pérdidas de carga para mayores caudales. Recordemos que las pérdidas dependen del cuadrado de la velocidad (por ende, del cuadrado del caudal) y por ello su aspecto parabólico. Para un caudal determinado el punto de operación de la bomba se encontrará en la intersección de las dos curvas. El conocimiento del punto de operación permitirá elegir la bomba más adecuada para satisfacer los requerimientos del sistema.

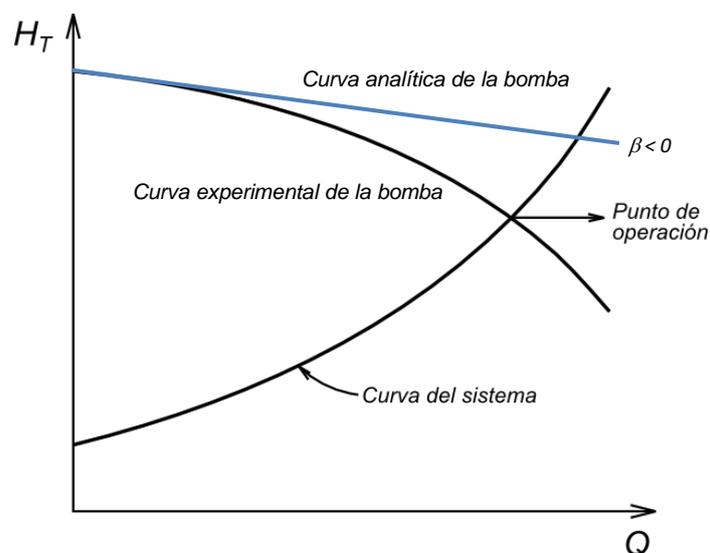


Figura 12.13: Curva característica "altura neta de carga-caudal" de una bomba centrífuga: la experimental y la analítica, superpuestas a la curva de requerimientos de carga del sistema. Por simplicidad se supone 100% de eficiencia en todos los puntos posibles de operación.

¹ La curva característica -experimental- de una bomba centrífuga con álabes curvados hacia atrás, difiere de la recta analítica (fig. 12.3), debido a los efectos viscosos que fueran desestimados en el análisis del ítem 12.2.

12.5.1 ANPA disponible y ANPA requerido

Las consideraciones de los párrafos anteriores se han hecho asumiendo un adecuado ANPA disponible en el sistema de modo de asegurar un flujo volumétrico líquido en el sector de succión de la bomba. La figura 12.14 muestra la relación típica entre el ANPA disponible en el sistema y el ANPA requerido por la bomba para satisfacer los requerimientos de caudal.

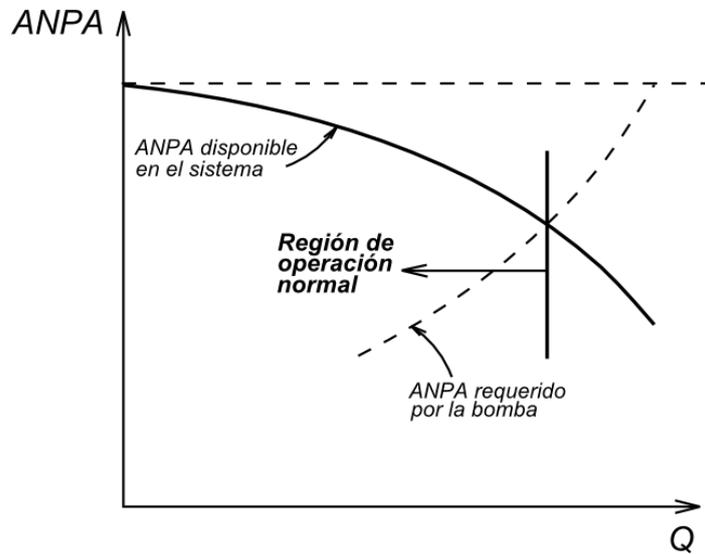


Figura 12.14: Requerimientos de altura neta positiva de aspiración para una bomba centrífuga. Se indica la región de operación sin riesgo de cavitación.

El ANPA requerido aumenta aproximadamente con el cuadrado del caudal por lo cual la bomba rápidamente puede superar la disponibilidad y producir una succión insuficiente. Cuando ello ocurre, la eficiencia del bombeo cae estrepitosamente como muestra esquemáticamente la figura 12.15. La operación normal de la bomba siempre se dará cuando el ANPA requerido sea menor al disponible.

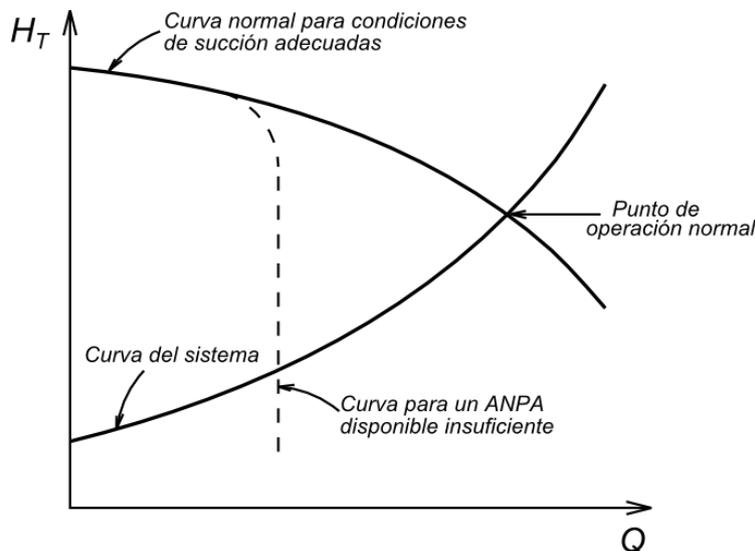


Figura 12.15: Curva de la bomba, curva del sistema y curva de operación con ANPA insuficiente.

12.5 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE BOMBAS

La figura 12.16 muestra la curva esquemática de la figura 12.15, lograda a través de la operación y mediciones en el banco de pruebas hidráulicas de la figura 12.10.

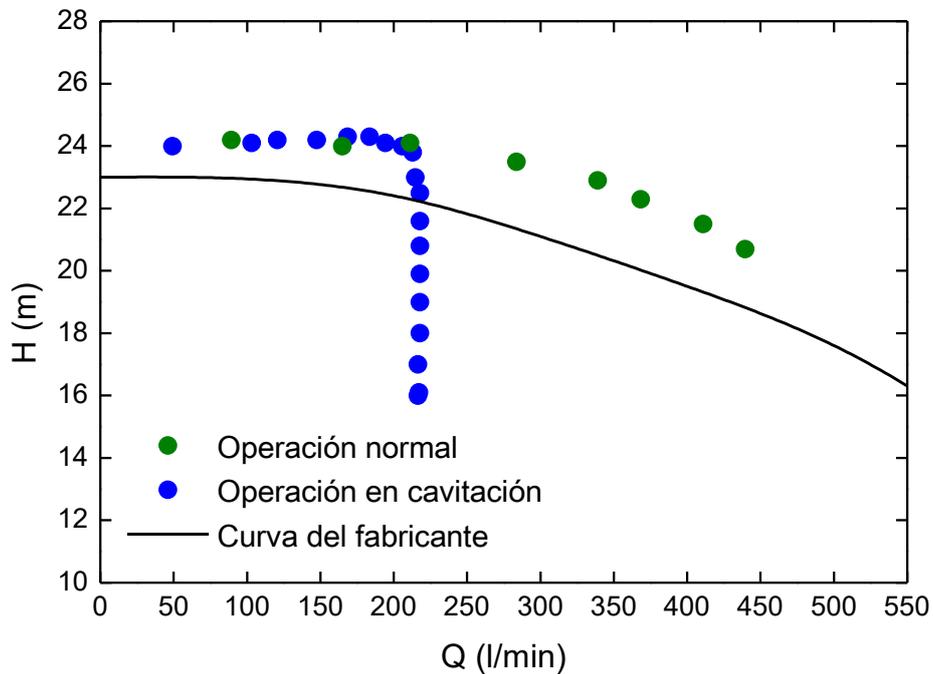


Figura 12.16: Curva H-Q de la bomba del banco de pruebas hidráulicas de la figura 12.10 para operación normal (ANPA suficiente) y operación con flujo de cavitación (ANPA insuficiente).

Cuando una bomba centrífuga entra en operación con cavitación, una manera de salir de ese estado es reduciendo el caudal. La figura 12.17 muestra las variaciones de las curvas del sistema durante este proceso.

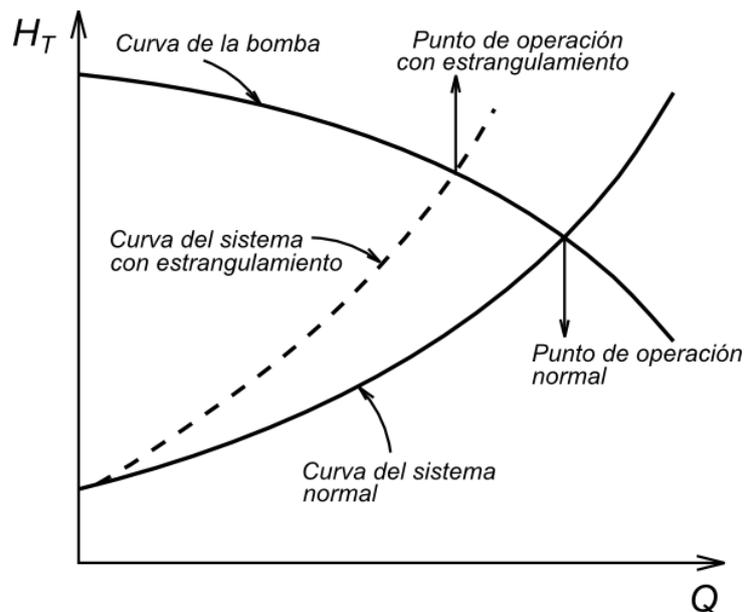


Figura 12.17: Variación del punto de operación de una bomba centrífuga debido a un estrangulamiento en la descarga. Se pasa la bomba a un régimen de operación sin riesgo de cavitación.

Ello se logra colocando una válvula de estrangulamiento a la salida de la bomba (ver figuras 12.7 y 12.9), de modo de producir una mayor pérdida de carga en la región de descarga y de esa manera reducir el caudal. La figura 12.17 muestra, además y con referencia a la figura 12.14, como nos movemos hacia una región de mayor ANPA disponible ².

El cierre de la válvula de estrangulamiento reduce el caudal y por ende la pérdida de carga en la succión, produciéndose un recupero del ANPA y la vuelta del flujo totalmente a la fase líquida. Si la reducción del caudal se produjese por el cierre parcial de la válvula esclusa -instalada en la succión-, ello empeoraría el funcionamiento porque al aumentar la pérdida de carga en la succión el ANPA, en vez de aumentar, se reduciría aún más.

Como recomendaciones finales para asegurar un ANPA disponible positivo, puede decirse que en la rama de succión de una bomba: el tanque de suministro debe estar sobreelevado respecto a la bomba y las tuberías deben ser lo más cortas, gruesas, lisas y con la menor cantidad de accesorios posible.

12.5.2 Determinación del punto de funcionamiento para la selección de la bomba

Con relación a lo anterior, deben estimarse con la mayor precisión posible las pérdidas de carga de un sistema. Nunca deben utilizarse factores de seguridad que las magnifiquen porque ello podría impactar en una selección inapropiada de la bomba. La figura 12.18 muestra este hecho.

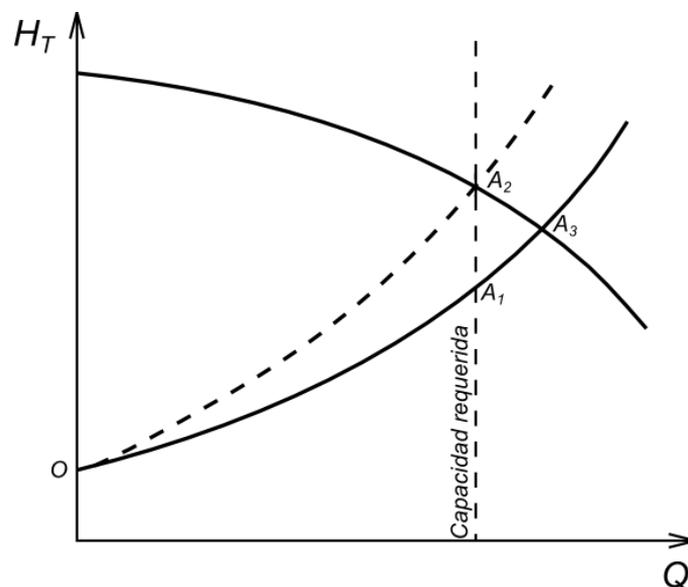


Figura 12.18: Curva de sistema (línea de trazos) con sobredimensionamiento de pérdidas de carga. Se predice un punto de operación en A_2 . Curva real del sistema (línea llena) y punto de operación real A_3 .

² En el primer enlace, usted podrá ver un video (explicado) del autor, donde se muestra la entrada y salida del régimen de cavitación en la bomba del banco de pruebas hidráulicas de la FRSF-UTN. En el segundo enlace se accede al video original y en el tercero a otro video del flujo bifásico.
<https://drive.google.com/file/d/1vLer1IzRrCdpz1TMZH05sgdKliLG2Xvm/view?usp=sharing>
<https://drive.google.com/file/d/1koOO1SJ7weFcSaXD9hbb503EP2d9-K5W/view?usp=sharing>
https://drive.google.com/file/d/1H2T_J81uFKdSKKt-bW3AVRSXjI4i1ASK/view?usp=sharing

Supóngase que la curva OA_1 es la curva real del sistema, pero fue incrementada la pérdida de carga por un factor de seguridad, luego, la curva del sistema obtenida es la OA_2 . La bomba seleccionada es tal que, se presume, trabajará en el punto A_2 , sin embargo, "realmente" la bomba trabajará en A_3 , el punto de equilibrio con la curva de carga real del sistema.

El problema que aquí subyace es que la bomba seleccionada trabajando en A_3 entregará un caudal mayor a menor presión y probablemente con una eficiencia inferior a la que tendría en A_2 .

12.5.3 Bombas conectadas en serie y en paralelo

No siempre una única máquina es capaz de alcanzar los requerimientos del sistema, para lo cual suelen conectarse dos o más bombas en serie o en paralelo. La forma de hacerlo dependerá de lo que se necesite, es decir: si se necesita altura de carga (por ejemplo, para subir agua a tanques muy elevados) las bombas se conectarán en serie y si se necesita caudal (por ejemplo, para sostener el suministro de agua potable desde la planta al ejido urbano), las bombas se conectarán en paralelo. En este último caso -con la conexión en paralelo- también puede asegurarse la continuidad del servicio por parada o rotura de una de las bombas ya que la otra continuará impulsando con la misma carga pero con un menor caudal.

La figura 12.19 muestra la curva de carga del sistema superpuesta a las curvas características de las dos bombas conectadas en serie

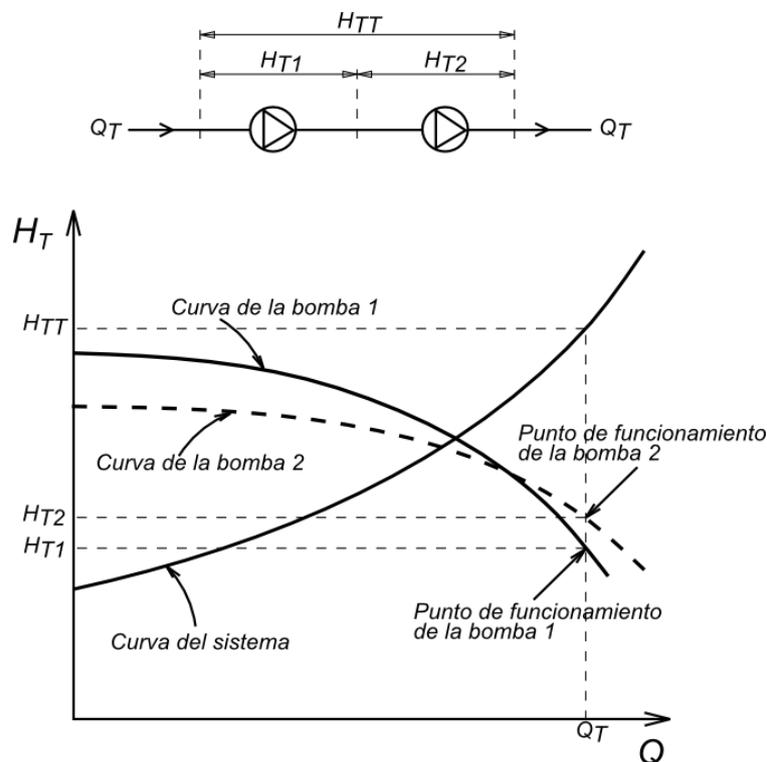


Figura 12.19: Conexión de bombas en serie. Ambas impulsan el mismo caudal y la altura neta de carga es la suma de las dos.

CAPITULO 12: MAQUINAS HIDRAULICAS: TURBOMAQUINAS DE IMPULSION

En la figura se ven los puntos de funcionamiento de cada bomba considerando que el caudal que impulsan es el mismo. La altura de carga resultará la suma de las alturas generadas para dicho caudal por cada bomba. Es decir:

$$H_{TT} = H_{T1} + H_{T2} \quad (12.24)$$

$$Q_T = Q_1 = Q_2 \quad (12.25)$$

Este problema es análogo a la conexión de resistencias en serie: el caudal es el análogo de la corriente y las alturas son análogas a la diferencia de potencial.

La figura 12.20 por su parte, muestra la curva del sistema superpuesta a las curvas características de dos bombas conectadas en paralelo. Los puntos de operación de las bombas se obtienen asumiendo que ambas producen la misma altura de carga y el caudal total resultará la suma de los impulsados por cada una. Esto es:

$$H_{TT} = H_{T1} = H_{T2} \quad (12.26)$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 \quad (12.27)$$

Como en el caso de la conexión de bombas en serie, la conexión en paralelo es también análoga a la conexión de resistencias eléctricas en paralelo.

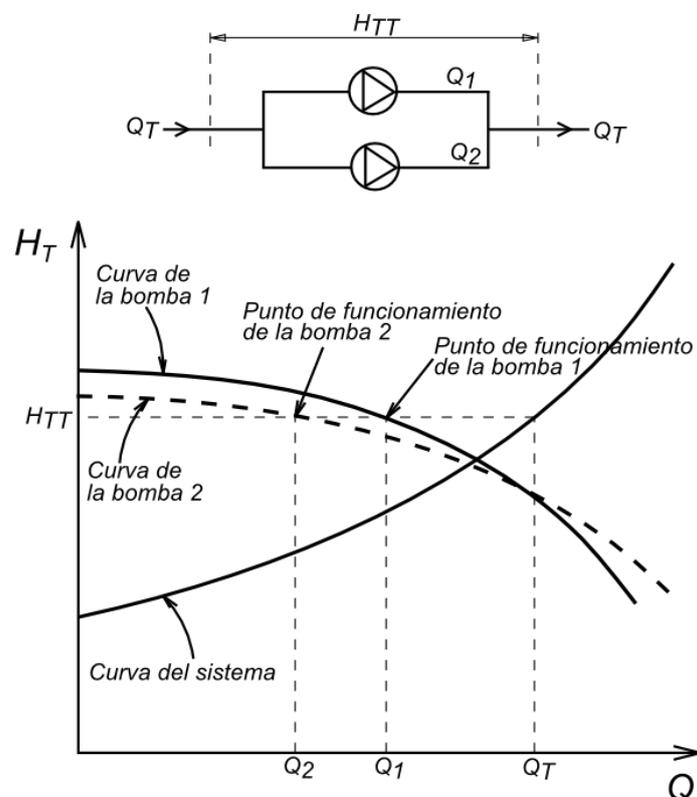


Figura 12.20: Conexión de bombas en paralelo: Ambas impulsan a la misma altura de carga y el caudal total es la suma de los caudales de cada una.

12.6 RELACIONES CARACTERÍSTICAS DE LAS BOMBAS

Para hallar los puntos de funcionamiento de las bombas en cada tipo de conexión, se requiere un método iterativo gráfico numérico que no vamos a tratar dado que se reserva para asignaturas de mayores alcances prácticos.

12.6 Relaciones entre magnitudes características de las bombas centrífugas

Por la experiencia y la teoría analizada en el ítem 12.2, convengamos que las magnitudes más representativas de una bomba centrífuga son: la velocidad de rotación (N cuando se mide en rpm), el diámetro del rotor (D), la potencia (P_E), la altura de carga (H_T) y el caudal (Q). Un análisis dimensional asumiendo la dependencia de unas sobre otras de estas magnitudes, conduce a las siguientes expresiones:

$$P_E = C_1 Q H_T \quad (12.28)$$

$$Q = C_2 N D^3 \quad (12.29)$$

$$H_T = C_3 N^2 D^2 \Rightarrow H_T^{3/2} = C_3^{3/2} N^3 D^3 \quad (12.30)$$

Operando entre las expresiones (12.29) y (12.30) y teniendo en cuenta que C_2 y C_3 (también C_1) son constantes, se llega a que

$$\frac{N \sqrt{Q}}{H_T^{3/4}} = \text{constante} \quad (12.31)$$

La (12.31) se denomina velocidad específica y se utiliza como un indicador del tipo de bomba. Siempre se halla en el punto de mayor eficiencia y su valor surge de colocar el caudal en *galones por minuto*, la velocidad de rotación en *rpm* y la altura de carga en *pie*. La velocidad específica, si bien no es una magnitud adimensional, sirve para comparar distintas bombas que guardan similitud. Su dimensión es $(L/T^2)^{3/4}$.

Asimismo, cuando existen dos bombas que son geoméricamente semejantes, se dice que son homólogas y el funcionamiento comparado de estas se rige por las siguientes leyes de afinidad que surgen de las ecuaciones (12.28), (12.29) y (12.30), entre otras que dan lugar a relaciones entre los ANPA de las bombas homólogas:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right) \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \quad (12.32)$$

$$\frac{H_{T1}}{H_{T2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \quad (12.33)$$

$$\frac{P_{E1}}{P_{E2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^5 \quad (12.34)$$

$$\frac{ANPA_1}{ANPA_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \quad (12.35)$$

Si las bombas homólogas poseen un diámetro levemente distinto, las expresiones (12.32) y (12.34) se simplifican a la siguiente forma:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right) \left(\frac{D_1}{D_2}\right) \quad (12.36)$$

$$\frac{P_{E1}}{P_{E2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 \quad (12.37)$$

El escalamiento que proponen las ecuaciones (12.32) a (12.37) permite predecir las variaciones que puede haber en una cierta instalación debido al cambio de una bomba por otra semejante, o bien, cuáles serían los valores característicos de una nueva bomba con diseño semejante a una existente.

12.7 Ventiladores, sopladores y compresores rotativos

Los ventiladores, sopladores y compresores se utilizan para impulsar aire u otros gases generando sobre ellos un aumento de presión. Básicamente se clasifican por su forma y principio de funcionamiento y la elevación de presión que pueden producir. Según el rango de presiones estáticas, estos dispositivos se dividen en: *ventiladores*, que trabajan generando presiones pequeñas hasta de 13,8 [kPa], por encima de ese valor y hasta 69,0 [kPa] los ventiladores se denominan *propulsores*; para presiones mayores a las expresadas y hasta el orden de las decenas de mega pascales [MPa], las máquinas se denominan *compresores*. Los ventiladores se utilizan para hacer circular aire desde o hacia un espacio determinado, en ocasiones a través de conductos. Los compresores en cambio, utilizan la compresibilidad del aire para suministrar grandes caudales a grandes velocidades para servir de soporte a una gran variedad de procesos industriales. Los ventiladores de propulsión operan prácticamente a presión constante y utilizan hélices de dos a cuatro aspas impulsando el flujo en la dirección axial. Son los clásicos dispositivos para el verano, en ocasiones se instalan en agujeros en las paredes para posibilitar la entrada de aire fresco del exterior o generar la salida de aire viciado desde el interior. Los ventiladores de ducto son similares a los de propulsión, pero trabajan dentro de un ducto generando elevaciones de presión hasta de 400 [Pa], pueden tener tamaños con diámetro cercanos a 0,9 [m] e impulsar caudales del orden de los 500 [m³/min].

Los sopladores centrífugos impulsan el aire con el mismo principio que utilizan las bombas centrífugas (ver ítem 12.2) y sus rodetes pueden construirse con

aspas inclinadas hacia atrás, hacia adelante, rectas o en forma de superficie sustentadora. Típicamente, los sopladores con aspas inclinadas hacia atrás, requieren una menor potencia que aquellos con aspas hacia adelante para iguales condiciones de servicio. Las aspas en forma de superficie sustentadora (tipo ala) se utilizan para lograr condiciones de servicio silenciosas y eficientes.

Los compresores centrífugos trabajan también con rotores de aspas curvadas como se ha relatado precedentemente. Estos se utilizan para impulsar caudales hasta de $2,5 \times 10^3$ [m³/min] a presiones tan altas como de 55 [MPa].

Los compresores axiales están constituidos por varios rodetes axiales en tándem, en forma de dispositivo multietapa. Se utilizan para suministrar caudales muy grandes, hasta de 25×10^3 [m³/min] a una presión de 700 [kPa].

12.8 Consideraciones acerca de ductos para aire

A riesgo de ser repetitivo respecto a discusiones realizadas en torno a la conducción de agua por cañerías, podemos destacar las siguientes consideraciones para el diseño o selección del tamaño de los ductos para conducción de aire ^{3 4}:

- Caída de presión: Son proporcionales al cuadrado de la velocidad del flujo, para lo cual es conveniente utilizar ductos de mayores secciones transversales.
- Requerimientos de potencia del soplador: La potencia requerida aumenta cuando la caída de presión es grande en el circuito de ductos, por ello conviene la utilización de ductos de gran área de flujo. Directamente proporcional a la potencia del soplador, será el costo del mismo.
- Costos de los ductos: Los costos de los ductos largos son mayores que los costos de los ductos cortos, por lo cual es recomendable el uso de estos últimos.
- Costos de instalación: Las tuberías pequeñas son en general más fáciles de instalar aunque este aspecto no es de mayor trascendencia.
- Espacio requerido: Las tuberías pequeñas requieren menor espacio e interfieren menos con otros equipos, mobiliarios u operaciones.
- Expansión futura: Se prefieren los ductos de gran tamaño para posibilitar ampliaciones sin necesidad de remoción y recambio de tuberías existentes.

³ En el enlace siguiente se puede ver un trabajo del autor y colaboradores, donde se diseña un sistema de climatización basado en tubos enterrados, un forzador del flujo de aire y su distribución en una vivienda básica para 4 personas.

https://drive.google.com/file/d/147aeGypo7hR6NYnvYPahhgB3K9RZQmFi/view?usp=drive_link

⁴ En el enlace siguiente se puede ver un trabajo del autor y colaboradores, donde se analiza el acondicionamiento de aire en un edificio de doble pared, simulando el flujo de ventilación producido por un gradiente térmico y el efecto de convección natural. Asimismo, se analiza comparativamente la ventilación por convección forzada.

https://drive.google.com/file/d/1duphoFc-R5uxUDIGsppn4Y3Tx_Ca5pei/view?usp=drive_link

- Ruido: El flujo de aire es ruidoso cuando éste se mueve por tuberías estrechas, válvulas y accesorios. Por esto es más conveniente el uso de ductos de gran tamaño.

Por último, es común que se utilicen ductos de sección circular para aire proveniente de sistemas de ventilación, calefacción o aire acondicionado. No obstante, debido a limitaciones de espacio, suelen utilizarse ductos de sección cuadrada o rectangular cuyo dimensionamiento o selección se realiza a través del denominado "diámetro equivalente" que está dado por:

$$D_e = \frac{1,3 (a b)^{5/8}}{(a + b)^{1/4}} \quad (12.38)$$

Donde a y b son los lados de la sección recta rectangular expresados en pulgadas (in). El diámetro equivalente -que resultará en pulgadas- permite utilizar para los ductos rectangulares las tablas y gráficas relativas a ductos circulares.

Preguntas para el repaso y la autoevaluación:

- 1) ¿Qué rol cumple la voluta de una bomba centrífuga en los intercambios de energía que se producen en su interior?
- 2) El volumen de control utilizado para el análisis dinámico del flujo con el rotor, ¿es fijo o es móvil?
- 3) Para el análisis de impulsión rotodinámica, ¿por qué se utiliza el balance macroscópico de momento angular?
- 4) ¿En el balance macroscópico de momento angular, por qué se desprecia el torque producido por las fuerzas gravitacionales?
- 5) ¿Cuáles son las condiciones simplificadorias para las cuales se desarrolla el balance macroscópico de momento angular?
- 6) ¿Qué significa que la máxima potencia de la bomba se obtendrá cuando la velocidad absoluta del flujo a la entrada del rotor tenga dirección radial?
- 7) ¿Por qué no se utilizan los álabes curvados hacia adelante?
- 8) Si el triángulo de velocidades en la salida de un álabe de una máquina hidráulica, es -en la misma escala geométrica- más grande que el triángulo de velocidades en la entrada, ¿qué tipo de máquina hidráulica es?
- 9) Si el triángulo de velocidades en la salida de un álabe de una máquina hidráulica, es -en la misma escala geométrica- más chico que el triángulo de velocidades en la entrada, ¿qué tipo de máquina hidráulica es?

- 10) Defina la cavitación por fenómenos hidrodinámicos e indique en un diagrama T-S un proceso a temperatura constante que termine en una mezcla de líquido y vapor.
- 11) ¿Por qué cuanto mayor es la temperatura de un flujo, más posibilidades hay de que se produzca cavitación? Muestre el fenómeno con un diagrama de estado de fases del agua.
- 12) Defina la altura de carga de succión y la altura neta positiva de aspiración (ANPA). ¿Qué significado tiene cada una?
- 13) Muestre la mejor ubicación de la bomba con relación al tanque, para asegurar un ANPA siempre positivo ante las variaciones del caudal.
- 14) En teoría, ¿a qué altura por encima del nivel de un tanque abierto a la atmósfera, podría instalarse una bomba que succione agua muy fría?
- 15) Ud. debe elevar agua desde una napa profunda hasta la superficie, ¿dónde ubicaría la bomba?
- 16) Cualquiera de las formas del balance de energía mecánica por unidad de tiempo, ¿tiene información de la ubicación de la bomba en el contexto de la instalación completa?
- 17) Defina el punto de operación de una bomba y ubíquelo en un diagrama adecuado.
- 18) Cuando el flujo succionado por una bomba es un flujo de cavitación, ¿qué características tiene el flujo a la salida de la bomba?
- 19) ¿A qué se llama válvula de estrangulamiento, en qué lugar de la instalación se coloca y para que se usa?
- 20) ¿Conviene colocar la válvula de estrangulamiento en la rama de succión de la bomba?
- 21) En la figura 12.14 ubique en la curva de la bomba, un punto de funcionamiento correspondiente a succión con cavitación, luego suponga que acciona la válvula de estrangulamiento hasta que el funcionamiento sea normal. En la misma gráfica de la figura 12.14, ubique un punto genérico de ese estado de funcionamiento.
- 22) ¿Qué característica deben tener las tuberías y los accesorios en la rama de succión? Justifique la respuesta en términos del ANPA.
- 23) ¿Cuál es la estrategia para sacar una bomba de un funcionamiento con flujo de cavitación?
- 24) Para seleccionar una bomba adecuada a una instalación, ¿conviene hacer cálculos magnificando las pérdidas de carga?
- 25) ¿En qué casos utilizaría un arreglo de dos o más bombas en paralelo?
- 26) ¿Cómo haría para suministrar agua a los pisos elevados de un edificio de gran altura?

CAPITULO 12: MAQUINAS HIDRAULICAS: TURBOMAQUINAS DE IMPULSION

- 27) ¿La teoría de impulsión rotodinámica desarrollada para bombas centrífugas, es válida para sopladores con rotores del mismo tipo?
- 28) Enumere las consideraciones a realizar para el diseño de ductos de conducción de aire para ventilación o climatización.

Bibliografía

- [1] *Introduction to Fluid Mechanics*, S. Whitaker, Krieger Publishing Company, Malabar Florida, 1992.
- [2] *Introduction to Continuum Mechanics*, W. M. Lai, D. Rubin, E. Krempl, Butterworth and Heinemann, Woburn, MA, 1996.
- [3] *Introducción a la Mecánica de los Fluidos*, R. W. Fox, A. T. Mc Donald, Mc Graw Hill México, 1995.
- [4] *Mecánica de Fluidos*, F. M. White, Mc Graw Hill, México, 1983.
- [5] *La Mecánica de Fluidos*, I. Shames, Mc Graw Hill, México, 1995.
- [6] *Mecánica de Fluidos. Fundamentos y Aplicaciones*, Y. A. Cengel y J. M. Cimbala, Mc Graw Hill, México, 2006.
- [7] *Mecánica de Fluidos, 3^{era} Edición*, M. C. Potter y D. C. Wiggert, Thomson, México, 2002.
- [8] *Mecánica de Fluidos Aplicada*, R. L. Mott, 4^o edición, Prentice Hall, México, 1996.
- [9] *Fenómenos de Transporte*, R. B. Bird, W. E. Stewart y E. N. Lightfoot, Editorial Reverté, Argentina, 1976.
- [10] *Flujo de fluidos para ingenieros químicos*, F. A., Holland, W. Baran, Ed. Géminis, Buenos Aires, 1980.
- [11] *Termodinámica*, V. M. Faires, C. M. Simmang, Grupo Noriega, 1^o Edición, México, 1993.
- [12] *Resistencia de Materiales*, L. Ortiz Berrocal, Mc Graw Hill, Madrid, 1991.
- [13] *Numerical analysis of the effects of material parameters on the lubrication mechanism for knee prosthesis*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Taylor and Francis. ISSN: 1025-5842. J. Di Paolo and M. Berli, vol 9, N° 2, April 2006, 79 – 89, 2006.
<https://drive.google.com/file/d/1KhCNRdFjf50YnmErn3muIG7GRDoVwnS/view?usp=sharing>
- [14] *Lubrication model of a knee prosthesis, with non newtonian fluid and porous rough material*. Latin American Applied Research. M. Berli, D. Campana, S. Ubal and J. Di Paolo, número 39, 105-111, 2009.
<https://drive.google.com/file/d/1NrC86v6l35zPciTIT4rvb4ecEwW0smG3/view?usp=sharing>
- [15] *Flujos de lubricación en canales elásticos. Una experiencia didáctica en clases de Mecánica del Continuo para Bioingeniería*. J. Di Paolo, D. M. Campana, S. Ubal y M. E. Berli. Publicado en las memorias del congreso VI CAEDI, ISBN: 978-987-633-011-4, 17 al 19 de setiembre de 2008, Salta, Argentina.
https://drive.google.com/file/d/1j_b0Uo6EVHb5oZ17mi5Be8VBnsmxLnMt/view?usp=sharing
- [16] *Modelo simplificado de interacción entre flujo y paredes delgadas elásticas utilizando la ecuación de Laplace*. J. Di Paolo, C. Fresno Rodríguez, S. Ubal, M. E. Berli y D. M. Campana. Publicado en los anales del congreso I CAIM, Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, 1 al 3 de octubre de 2008, Bahía Blanca, Argentina.
https://drive.google.com/file/d/1cCu6McW-pqnKWOTWRe9Yuq1H_s9GAS8w/view?usp=sharing
- [17] *Una actividad de cátedra basada en una analogía entre flexión pura y flujo laminar en el área de la Mecánica de Materiales*. J. Di Paolo, M. Berli y H. Tosone. Publicado en las memorias del congreso, en CD Rom, Segundo Congreso de Ingeniería Mecánica (2^o CAIM), San Juan, Argentina, 16-19 Noviembre 2010.
<https://drive.google.com/file/d/1CZ2X0pDvh-7dXmLzMbqBxpLsPbREC0wc/view?usp=sharing>

- [18] *Banco didáctico de pruebas hidráulicas: determinación experimental indirecta de la rugosidad de cañerías*. J. Di Paolo, G. Torres, D. Campana, S. Ubal, M. Berli, F. Brunelli, E. Cánepa y N. Valiente. Publicado en las memorias del congreso, en CD Rom, Segundo Congreso de Ingeniería Mecánica (2º CAIM), San Juan, Argentina, 16-19 Noviembre 2010. https://drive.google.com/file/d/1NHx8DkclWVG3o9qZ_oxN6cnzf3O9_vWoZ/view?usp=sharing
- [19] *Análisis por elementos finitos de un modelo de lubricación 2D para una prótesis de cadera*. J. Di Paolo y M. E. Berli. Revista Mecánica Computacional, vol. XXI. Primer Congreso Sudamericano de Mecánica Computacional MECOM 2002, realizado en Paraná-Santa Fe, entre el 28 al 31 de octubre de 2002. https://drive.google.com/file/d/1X5LcGd3MTd71zRJHs_6jkDSb5WZyJNA2/view?usp=sharing
- [20] *Análisis computacional 2D del flujo en el interior de un dispositivo de asistencia ventricular pulsátil implantable*. Tesis para la Maestría en Ingeniería Biomédica de la Facultad de Ingeniería de la UNER. Maestrando Bioing. Ezequiel R. Frías, 2015. https://drive.google.com/file/d/1zr6TrG2XuTpEd0bjvJUQEfAGk_ox7BBq/view?usp=sharing
- [21] *Implementación computacional de una nueva estrategia de resorción ósea orientada al estudio del accionar de las unidades básicas multicelulares. Aplicación al proceso de remodelación de huesos humanos*. Tesis para el Doctorado en Ingeniería con mención en Bioingeniería de la UNER. Doctorando Mag. Bioing. Marcelo Eduardo Berli, 2020. https://drive.google.com/file/d/12AHK4KtVFKKKOpa9_yRy8OcRm0AgA64m/view?usp=sharing
- [22] *Articulaciones sinoviales artificiales de alta movilidad: Investigaciones para el desarrollo de prótesis de por vida*. Tesis para el Doctorado en Ingeniería con mención en Bioingeniería de la UNER. Doctoranda Bioing. Brenda Anahí Weiss, 2022. https://drive.google.com/file/d/1HevILXvjSfisCfYKnBrL894jgYN_Iyvf/view?usp=sharing